

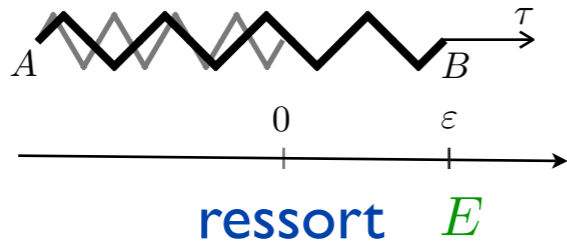
# Thermodynamique III

(J.-J. Marigo)

# Modèles rhéologiques

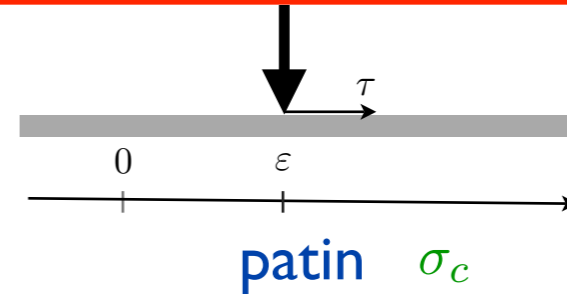
# éléments de base

comportement réversible



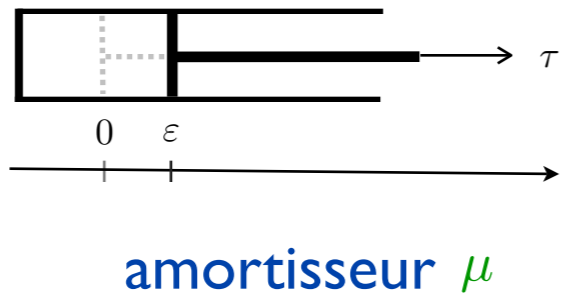
$$\tau = E\varepsilon$$

comportement irréversible indépendant des vitesses



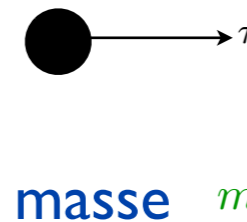
$$|\tau| \leq \sigma_c, \quad \dot{\varepsilon} \begin{cases} \leq 0 & \text{si } \tau = -\sigma_c \\ = 0 & \text{si } -\sigma_c < \tau < +\sigma_c \\ \geq 0 & \text{si } \tau = +\sigma_c \end{cases}$$

comportement irréversible dépendant des vitesses



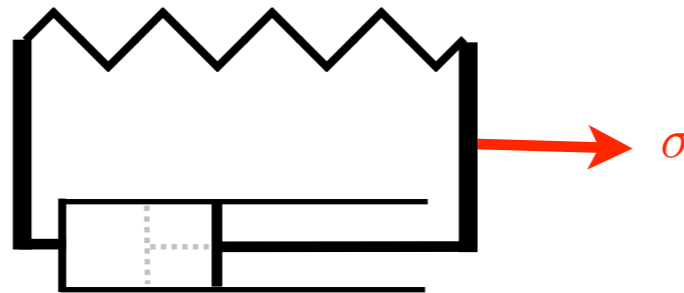
$$\tau = \mu \dot{\varepsilon}$$

comportement dynamique



$$\tau = m \ddot{\varepsilon}$$

modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt:  
assemblage ressort-amortisseur en parallèle



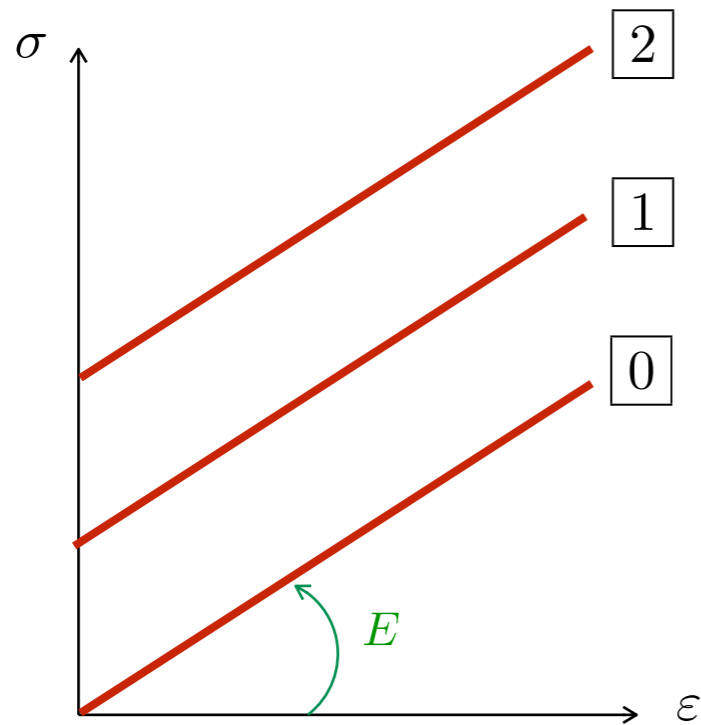
$\varepsilon$  : déplacement de l'extrémité droite du ressort et de l'amortisseur

$E$  : raideur du ressort

$\mu$  : module de viscosité de l'amortisseur

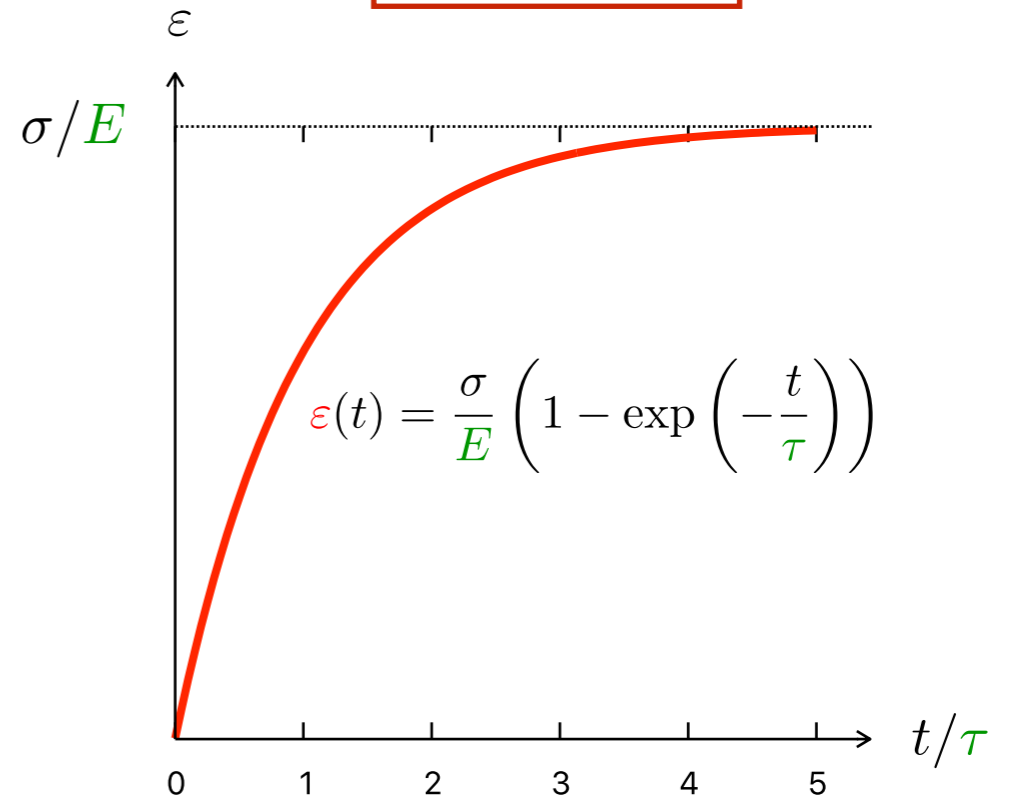
$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}$$

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}$$



$\dot{\varepsilon} = \text{constante}$

fluage limité



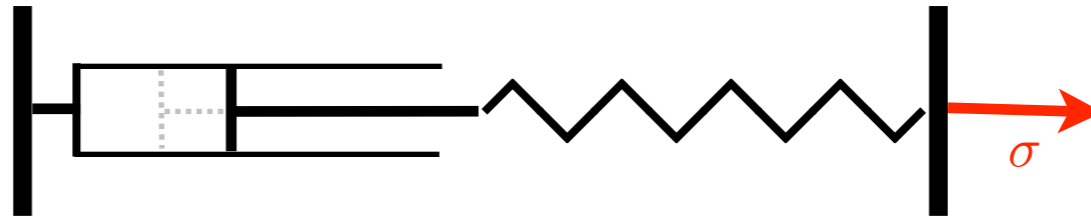
$\sigma = \text{constante}$

$$\tau = \mu/E$$

élasticité instantanée infinie

Elasticité différée :  $\sigma = E\varepsilon$

## modèle viscoélastique de Maxwell: assemblage ressort-amortisseur en série



$\varepsilon$  : déplacement de l'extrémité droite du ressort et de l'amortisseur

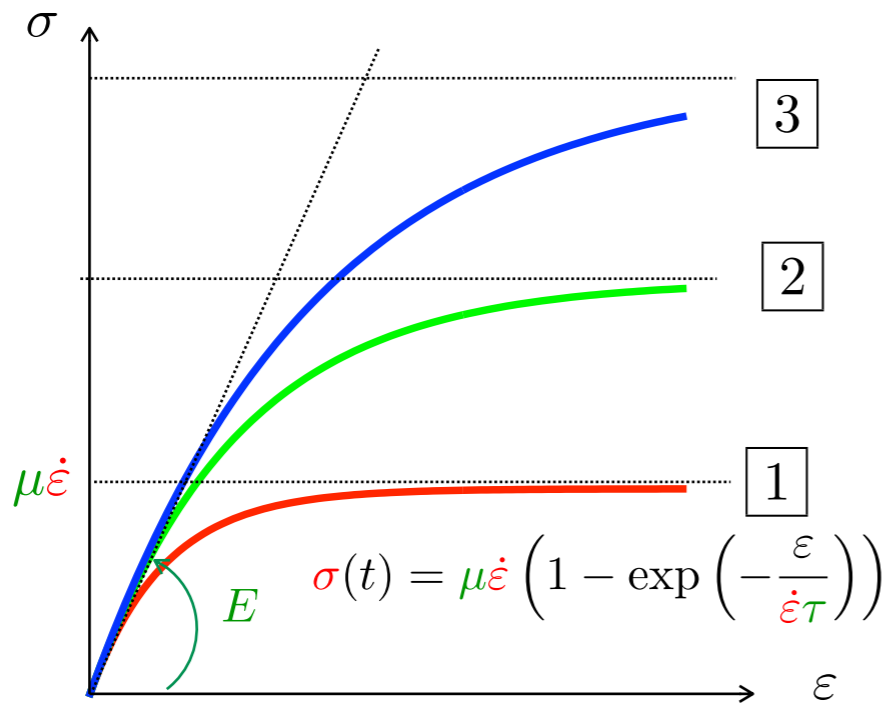
$\varepsilon^v$  : déplacement de l'extrémité droite de l'amortisseur variable interne

$E$  : raideur du ressort

$\mu$  : module de viscosité de l'amortisseur

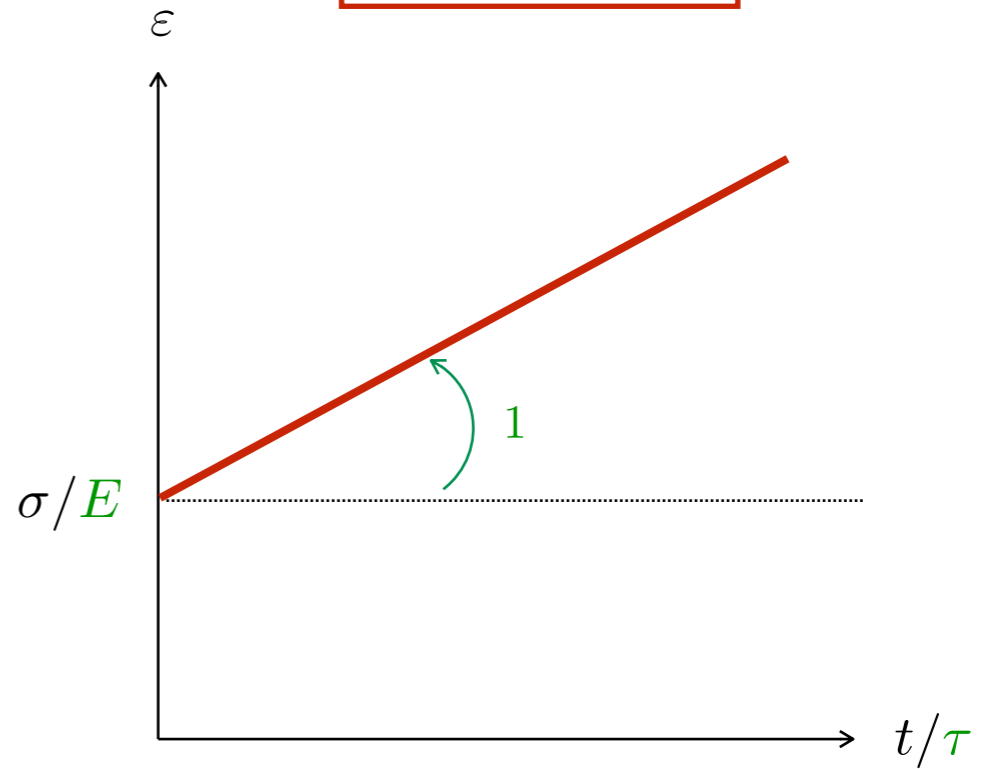
$$\begin{cases} \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^v) \\ \sigma = \mu \dot{\varepsilon}^v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^v) \\ \sigma = \mu \dot{\varepsilon}^v \end{cases}$$



$\dot{\varepsilon} = \text{constante}$

fluage illimité



$\sigma = \text{constante}$

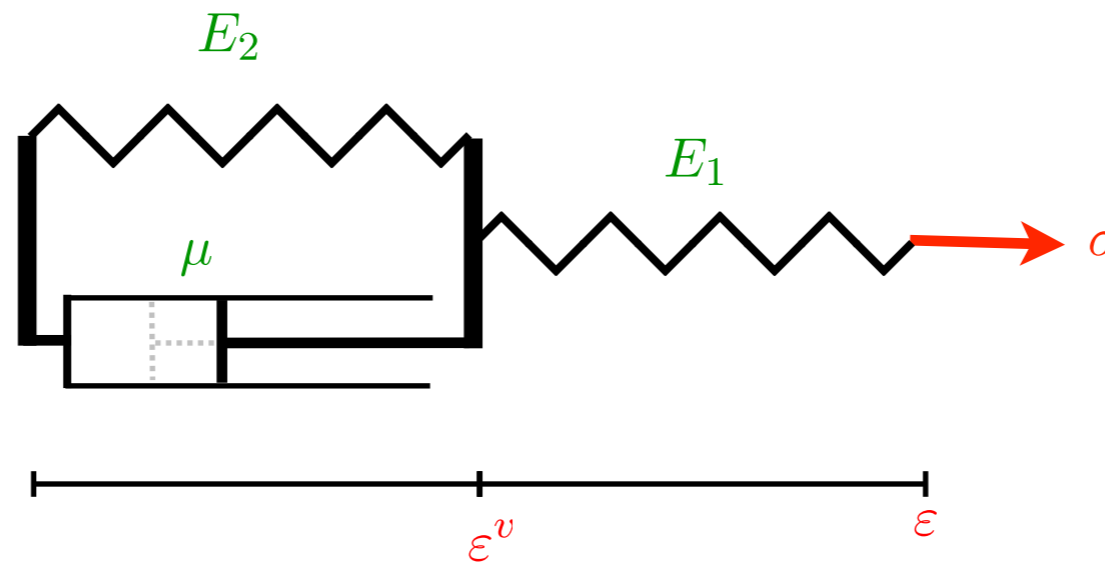
$$\tau = \mu / E$$

Elasticité instantanée :  $\sigma = E\varepsilon$

Elasticité différée nulle

## Exercice

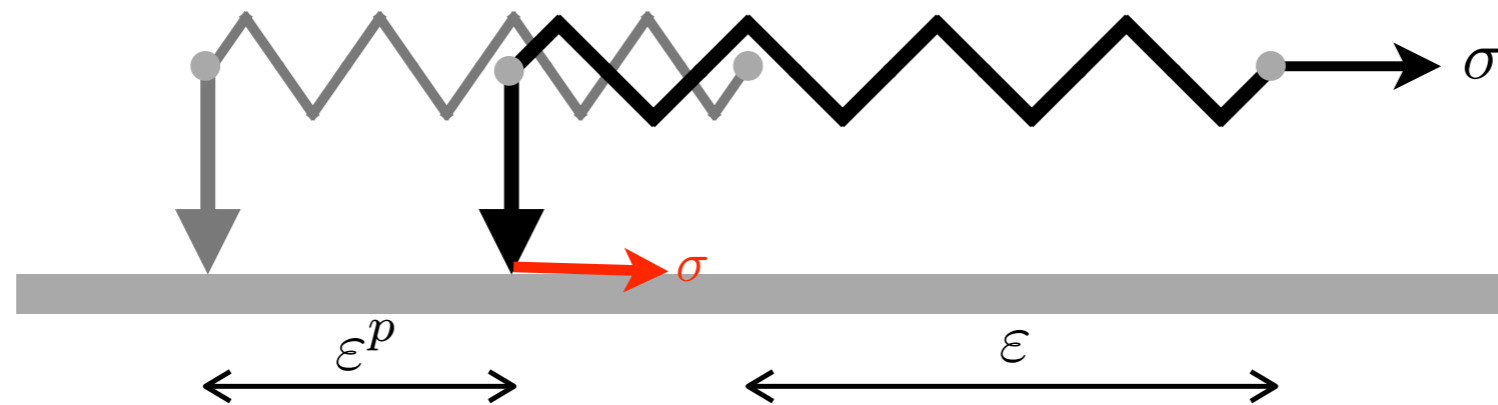
- Etudier le modèle rhéologique de Zener



$$\begin{cases} \sigma = E_1(\epsilon - \epsilon^v) \\ \sigma - E_2\epsilon^v = \mu\dot{\epsilon}^v \end{cases}$$



# modèle élasto-plastique sans écrouissage: assemblage patin-ressort



$\varepsilon$  : déplacement de l'extrémité droite du ressort

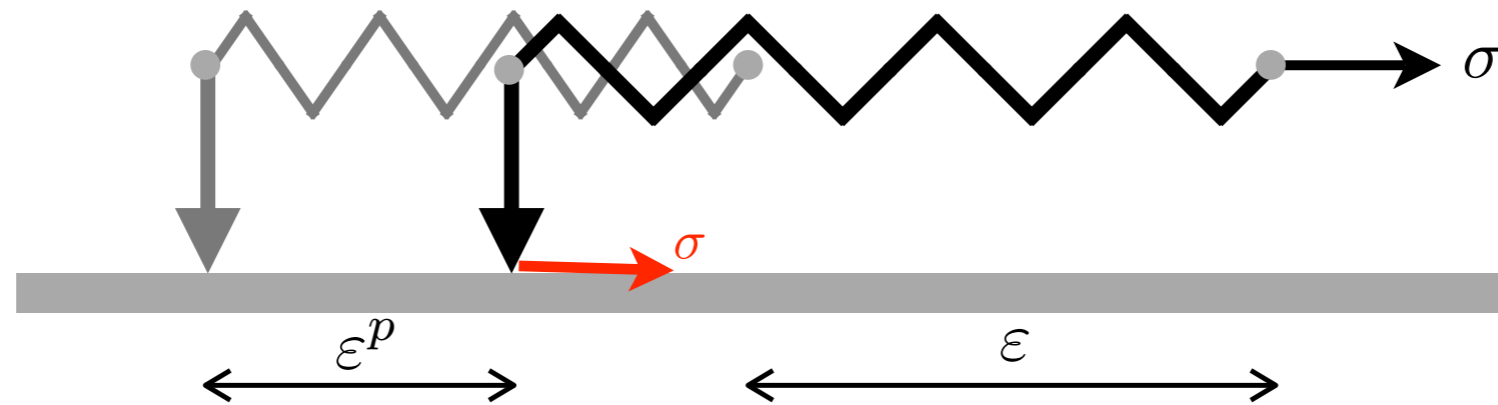
$\varepsilon^p$  : déplacement de l'extrémité gauche du ressort et du patin

$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$  : allongement du ressort

$(\varepsilon, \varepsilon^p)$  : variables d'état de l'assemblage

$\sigma$  : tension du ressort et force exercée par le patin sur le support

# relations de comportement et problème d'évolution



ressort

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

patin

$$|\sigma| \leq \sigma_c, \quad \dot{\varepsilon}^p \begin{cases} \leq 0 & \text{si } \sigma = -\sigma_c \\ = 0 & \text{si } -\sigma_c < \sigma < \sigma_c \\ \geq 0 & \text{si } \sigma = +\sigma_c \end{cases}$$

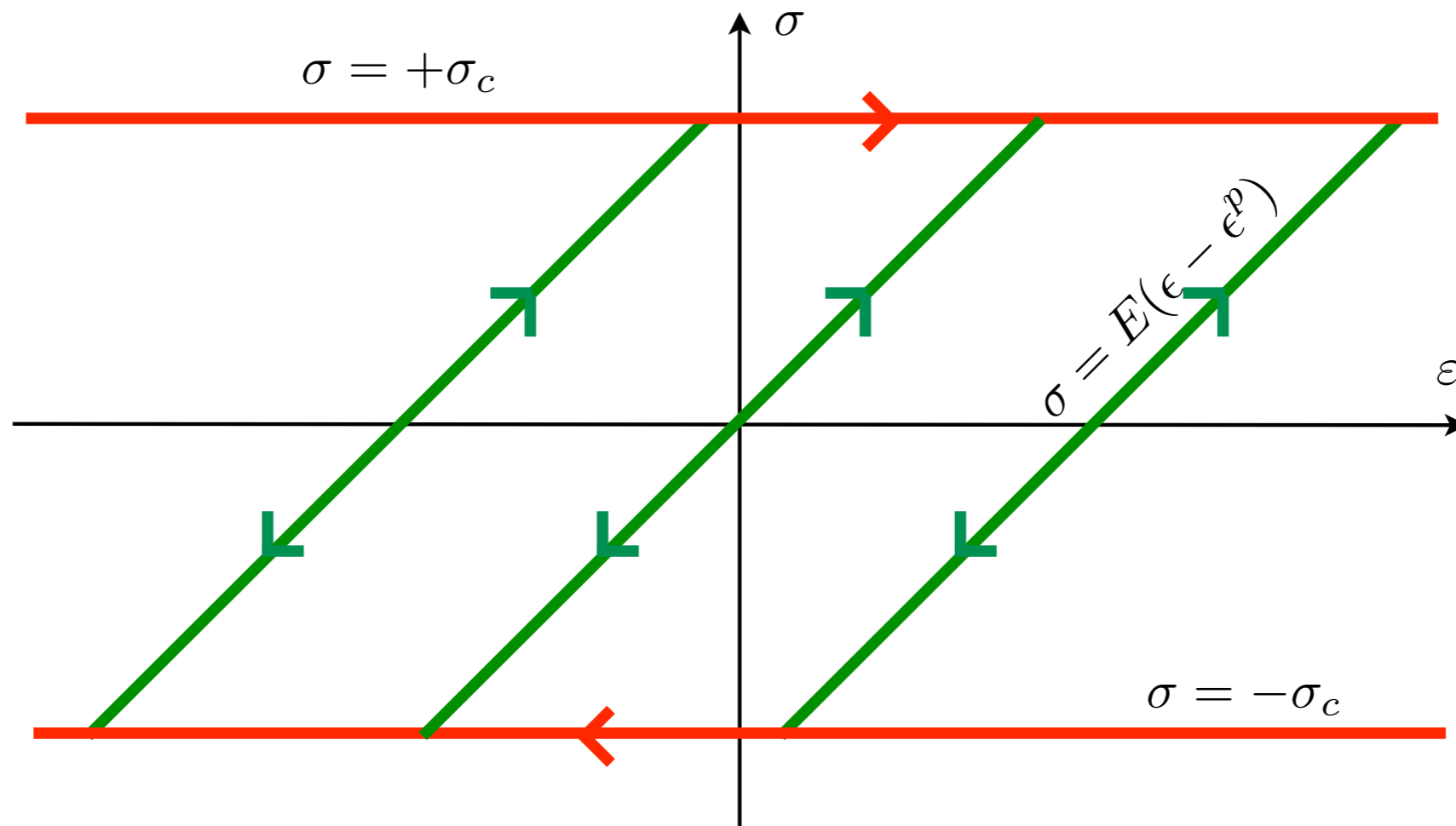
Problème d'évolution :

On se donne  $t \mapsto \varepsilon(t)$  (**pilotage en déplacement**) pour  $t \geq 0$  et la position initiale du patin  $\varepsilon^p(0) = 0$ .

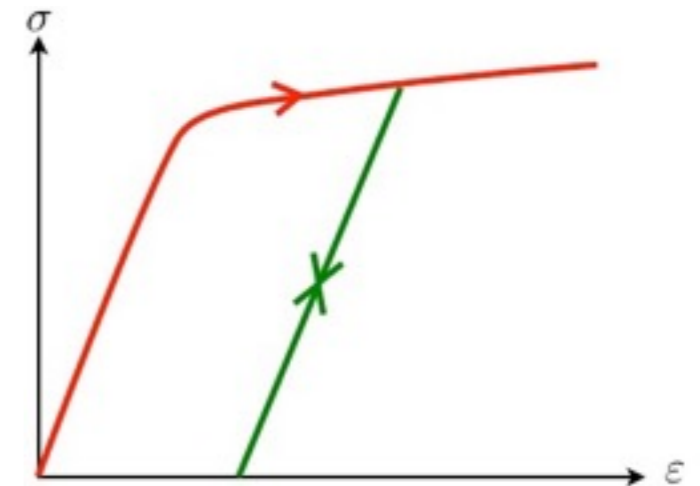
On cherche la réponse  $t \mapsto \sigma(t)$  et  $t \mapsto \varepsilon^p(t)$ .

régularité=continuité en temps

## réponse générale du patin-ressort



- irréversibilité des phases de glissement
- réversibilité des phases de non glissement



# Energies

1. Energie de déformation du ressort :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\sigma(t)^2}{2E} = \frac{1}{2} E(\varepsilon(t) - \varepsilon^p(t))^2$$

2. Travail de déplacement de l'extrémité droite du ressort :

$$\mathcal{W} = \int_{t_0}^{t_1} \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) dt$$

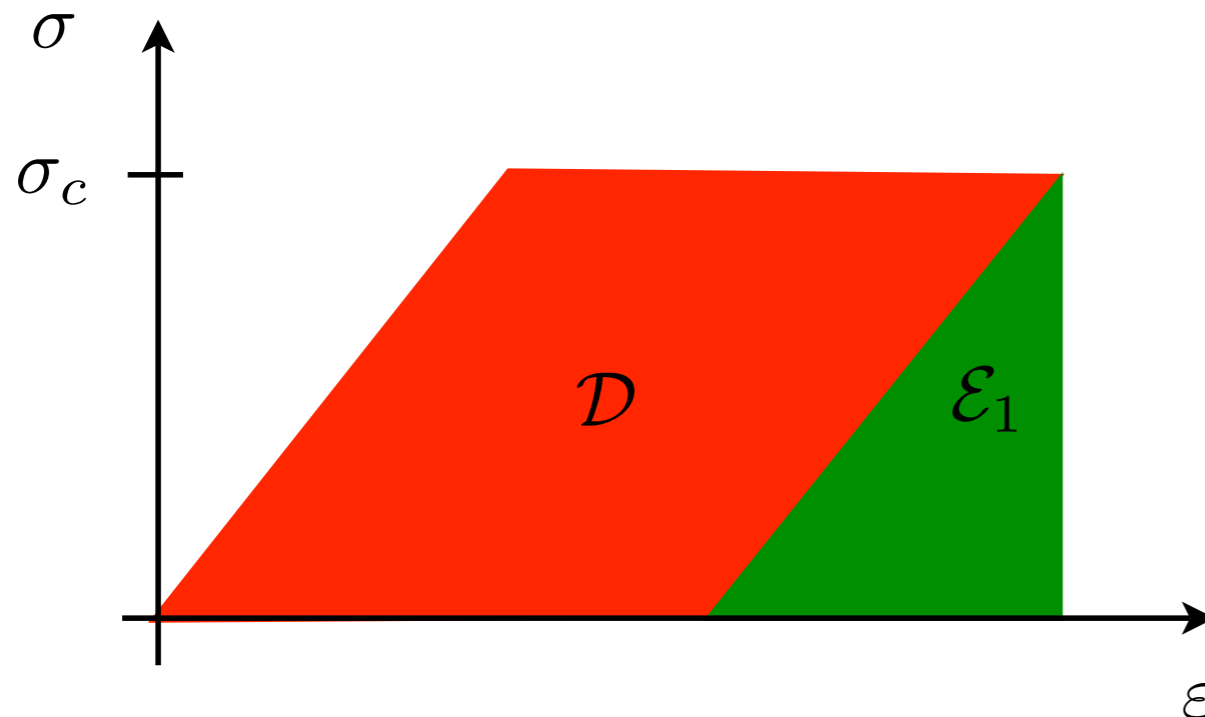
3. Energie dissipée par frottement lors du glissement du patin :

$$\mathcal{D} = \sigma_c \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\varepsilon}^p| (t) dt$$

$$\sigma \dot{\varepsilon}^p = \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p|$$

$$\mathcal{W} = \Delta \mathcal{E} + \mathcal{D}$$

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\varepsilon} &= \sigma (\dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p) \\ &= \frac{\sigma \dot{\sigma}}{E} + \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p| \\ &= \dot{\varepsilon} + \sigma_c |\dot{\varepsilon}^p| \end{aligned}$$



## Modélisation 3D (isotherme)

- Modèles viscoélastiques de type Kelvin-Voigt

- ✓ Hypothèses

Variables d'état :  $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})$

$$\text{Relations constitutives : } \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\hat{\sigma}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) \\ \psi = \underline{\underline{\hat{\psi}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) \end{cases}$$

- ✓ Conséquences de l'inégalité de Clausius-Duhem

$$0 \leq \left( \underline{\underline{\hat{\sigma}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) - \frac{\partial \underline{\underline{\hat{\psi}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\partial \underline{\underline{\hat{\psi}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}} \cdot \underline{\underline{\ddot{\varepsilon}}}, \quad \forall (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\ddot{\varepsilon}}})$$



$$\frac{\partial \underline{\underline{\hat{\psi}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}} = \underline{\underline{0}}$$



$$\boxed{\psi = \underline{\underline{\hat{\psi}}}(\underline{\underline{\varepsilon}})}, \quad \boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \underline{\underline{\hat{\psi}}}(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\sigma}}^v(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})}, \quad \boxed{\underline{\underline{\sigma}}^v(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \geq 0}$$

- ✓ Cas linéaire, isotrope

$$\boxed{\psi = \frac{1}{2} \lambda (\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \underline{\underline{\mu}} \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad \boxed{\underline{\underline{\sigma}}^v = \lambda^* \text{Tr } \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\mu}}^* \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}$$

$$\boxed{3\lambda^* + 2\underline{\underline{\mu}}^* \geq 0}, \quad \boxed{\underline{\underline{\mu}}^* \geq 0}$$

- Modèles viscoélastiques de type Maxwell

- ✓ Hypothèses

Variables d'état :  $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v)$

$$\text{Relations constitutives : } \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\hat{\sigma}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \\ \psi = \underline{\underline{\hat{\psi}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^v = \underline{\underline{\hat{f}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \end{cases}$$

- ✓ Conséquences de l'inégalité de Clausius-Duhem

$$0 \leq \left( \underline{\underline{\hat{\sigma}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v) - \frac{\partial \underline{\underline{\hat{\psi}}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \right) \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\partial \underline{\underline{\hat{\psi}}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \cdot \underline{\underline{\hat{f}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v), \quad \forall (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}})$$



$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \underline{\underline{\hat{\psi}}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v),$$

$$-\frac{\partial \underline{\underline{\hat{\psi}}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \cdot \underline{\underline{\hat{f}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \geq 0$$

- Modèles viscoélastiques de type Maxwell (fin)

✓ Cas linéaire, isotrope avec

$$\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}}^v = 0$$

- Forme de l'énergie libre moyennant le choix d'une configuration de référence naturelle

$$\psi = \frac{1}{2} \lambda (\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) + h \underline{\underline{\varepsilon}}^v \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^v$$

- Forces thermodynamiques

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \lambda (\text{Tr } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^v),$$

$$\underline{\underline{X}} = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^v} = 2\mu (\underline{\underline{\varepsilon}}^D - \underline{\underline{\varepsilon}}^v) - 2h \underline{\underline{\varepsilon}}^v$$

- Loi d'évolution des variables internes

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^v &= \alpha \underline{\underline{\varepsilon}}^D + \beta \underline{\underline{\varepsilon}}^v \\ &= \alpha^* \underline{\underline{X}} + \beta^* \underline{\underline{\varepsilon}}^v \end{aligned}$$

- Inégalité de Clausius-Duhem

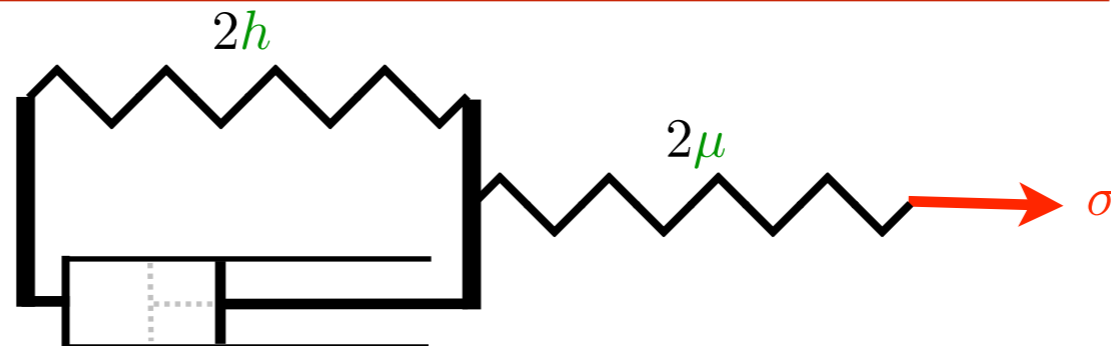
$$0 \leq \underline{\underline{X}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^v = \alpha^* \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}} + \beta^* \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^v, \quad \forall (\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^v)$$



$$\alpha^* \geq 0,$$

$$\beta^* = 0$$

Modèle rhéologique de Zener (ressort-amortisseur-ressort)



Maxwell :  $h = 0, \quad 0 < \mu < +\infty$

Kelvin-Voigt :  $h > 0, \quad \mu = +\infty$



# Comportement élasto-plastique 3D

- ▶ Petites transformations
- ▶ Sans viscosité
- ▶ Isotherme
- ▶ Approche phénoménologique

# La relation contrainte-déformation

- ▶ Les déformations plastiques sont des déformations “résiduelles”
- ▶ Le comportement est élastique à déformation plastique constante avec une rigidité invariable

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  : tenseur symétrique

$\underline{\underline{\varepsilon}}$  : déformation totale, dérive d'un déplacement

$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  : déformation plastique, ne dérive pas en général d'un déplacement

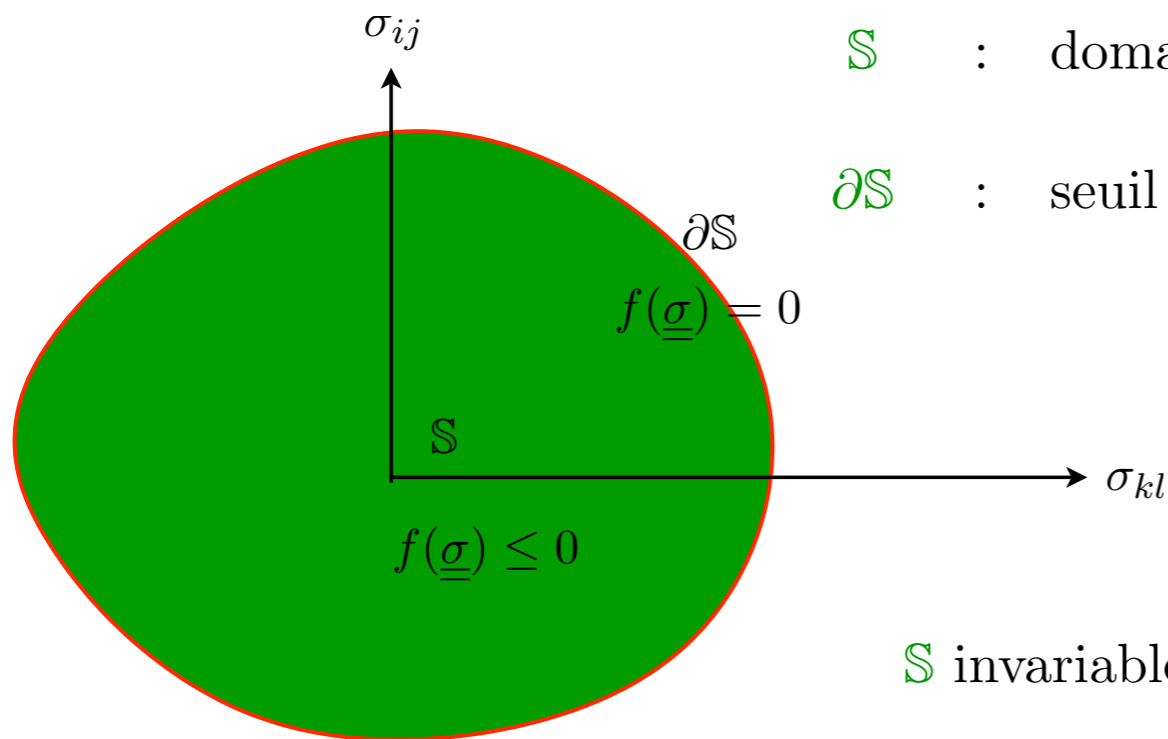
$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p$  : déformation élastique, ne dérive pas en général d'un déplacement

$(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^p)$  : variables d'état de l'élément de volume (les seules en plasticité parfaite)

# L'évolution des déformations plastiques

- ▶ loi à seuil
- ▶ seuil en contraintes ou en déformations

Constat expérimental : Il existe, à chaque instant, un domaine  $\mathcal{S}$  dans l'espace des contraintes tel que la déformation plastique n'évolue pas tant que les contraintes sont à l'intérieur et ne peut évoluer que quand les contraintes sont sur le bord.



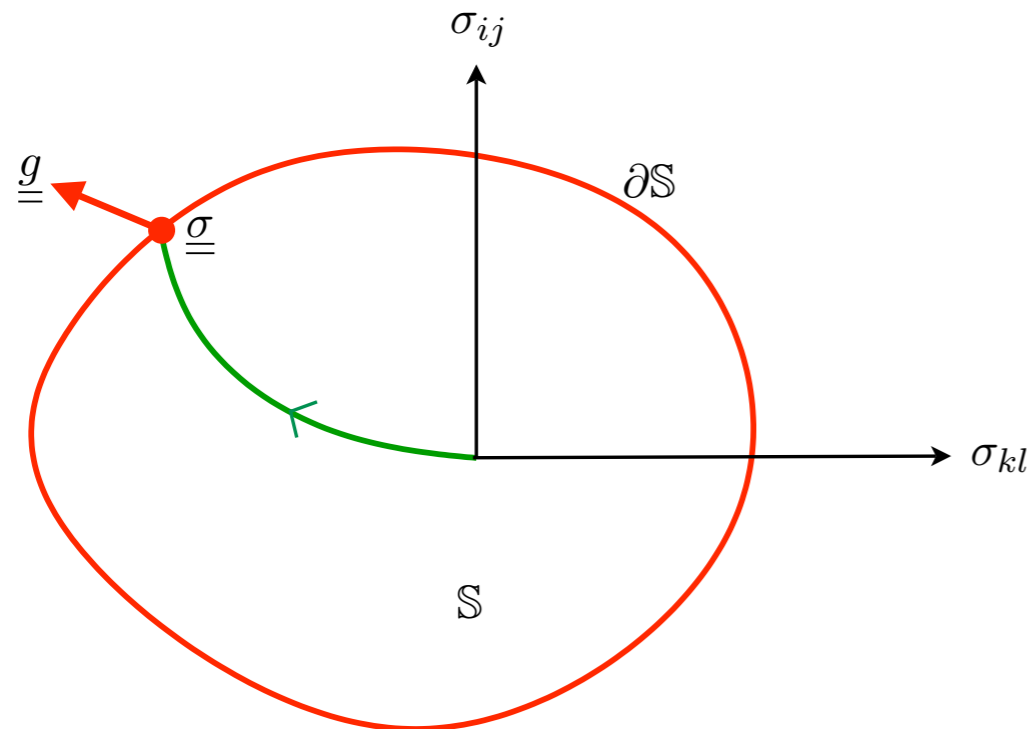
$\mathcal{S}$  : domaine d'élasticité (actuel) :  $\{\underline{\sigma} \in \mathbb{M}_s : f(\underline{\sigma}) \leq 0\}$

$\partial\mathcal{S}$  : seuil de plasticité (actuel) :  $\{\underline{\sigma} \in \mathbb{M}_s : f(\underline{\sigma}) = 0\}$

$\mathcal{S}$  invariable = plasticité parfaite

$\mathcal{S}$  variable avec  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  = plasticité avec écrouissage

► loi d'écoulement



$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}^p}} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 \\ \dot{\eta} \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{\sigma}}) & \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \end{cases}$$

$\dot{\eta} \in \mathbb{R}$  : multiplicateur plastique (à déterminer)

$\underline{\underline{g}}(\underline{\underline{\sigma}})$  : direction d'écoulement (donnée)

Il reste à identifier  $f$  et  $\underline{\underline{g}}$

Expérimentation + Principes physiques

# Plasticité parfaite isotherme

- Conséquence de Clausius-Duhem

Energie libre = Energie élastique

$$\psi = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) : \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p)$$



$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^p}$$



$$\dot{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \geq 0$$

peu restrictif

- Inégalité de Hill en plasticité parfaite

$$(\underline{\underline{\sigma}}(t) - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p(t) \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathbb{S}$$

$\underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p(t)$  = Puissance dissipée réellement

$\underline{\underline{\sigma}}^* : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^p(t)$  : Puissance dissipée virtuellement dans un état de contrainte admissible

une sorte de principe de dissipation maximale

beaucoup plus restrictif (convexité du critère et loi de normalité pour l'écoulement),  
... mais peu intuitif et trop spécifique à la plasticité

- Le Second Principe de la Thermodynamique

Inégalité de Clausius-Duhem: la puissance dissipée est non négative

$$\dot{\mathcal{D}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \dot{\psi} \geq 0$$

$\dot{\mathcal{D}}$  = puissance dissipée,  $\psi$  = énergie libre

- Le postulat de Drucker-Ilyushin

Le travail de déformation est non négatif dans tout cycle en déformation

$$\int_0^1 \underline{\underline{\sigma}}(t) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(t) dt \geq 0, \quad \forall t \mapsto \underline{\underline{\varepsilon}}(t) : \underline{\underline{\varepsilon}}(0) = \underline{\underline{\varepsilon}}(1)$$

- Le principe du travail plastique maximal de Hill (en plasticité)

$$(\underline{\underline{\sigma}}(t) - \underline{\underline{\sigma}}^*) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p(t) \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{\sigma}}^* \in \mathcal{S}(t)$$

# Drucker-Ilyushin en élasticité

- ▶ La nécessité physique du postulat:

Sinon on pourrait puiser autant d'énergie que l'on veut d'un élément de volume

(S'il existait un cycle pour lequel le travail est négatif, alors en le parcourant suffisamment de fois on pourrait récupérer autant d'énergie que l'on veut. Pratique, mais ...)

- ▶ Les conséquences du postulat

- Le travail de déformation est nul dans tout cycle

(S'il existait un cycle pour lequel le travail est positif, alors en le parcourant en sens inverse on pourrait récupérer de l'énergie.)

- Le travail ne dépend pas du chemin suivi
- Les contraintes dérivent d'un potentiel

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

- En élasticité linéaire, symétrie du tenseur de rigidité



# Comparaison

## ▶ Drucker-Ilyushin vs Hill:

### - En plasticité parfaite,

sous réserve de régularité suffisante du domaine d'élasticité et l'évolution de la déformation plastique, les deux "principes" sont **équivalents**

### - En plasticité avec écrouissage,

(toujours sous les mêmes conditions de régularité), le postulat de Drucker-Ilyushin **implique** l'inégalité de Hill, mais la réciproque n'est pas toujours vraie

Régularités utilisées dans les démonstrations (optimales?):

- Domaine d'élasticité = connexe fermé, d'intérieur non vide, fermeture de son intérieur, à frontière ``régulière''
- Déformation plastique = fonction du temps différentiable par morceaux

- Loi d'évolution standard en plasticité parfaite

- ▶ dans le cas d'un domaine sans point anguleux sur le bord

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}^p}} = \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0, \quad \dot{\eta} \geq 0, \quad \dot{\eta} f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

simple généralisation de la loi uniaxiale

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\eta} \text{sign}(\sigma)$$

$$|\sigma| \leq \sigma_c, \quad \dot{\eta} \geq 0, \quad \dot{\eta} (|\sigma| - \sigma_c) = 0$$

- ▶ se généralise aux points anguleux (critère de Tresca)