Thermodynamique II

(J.-J. Marigo)

Comportement thermoélastique

- ## Hypothèses

$$\text{Variables d'état : } (\underline{\varepsilon}, T, \nabla T)$$

$$\text{Relations constitutives : } \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \hat{\underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \nabla T) \\ s = \hat{s}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \nabla T) \\ e = \hat{e}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \nabla T) \\ \underline{q} = \hat{\underline{q}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \nabla T) \end{cases}$$

ψ : énergie libre volumique, $\boxed{\psi = e - Ts}$

$$\psi = \hat{\psi}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \nabla T)$$

- Restrictions imposées par l'inégalité de Clausius-Duhem

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \underline{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + T\dot{s} - \dot{e} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \nabla T \\
&= \underline{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - s\dot{T} - \dot{\psi} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \nabla T \\
&= \left(\hat{\underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \left(\hat{s} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial (\nabla T)} \cdot \nabla \dot{T} - \frac{\hat{\underline{q}}}{T} \cdot \nabla T
\end{aligned}
$$

doit être vérifiée $\forall (\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \nabla T), \quad \forall (\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \dot{T}, \nabla \dot{T})$

$$
\Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \hat{\underline{\underline{\sigma}}} = \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \hat{s} = -\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial T} \\ \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial (\nabla T)} = \underline{0} \end{cases}}, \qquad \boxed{\hat{\underline{q}} \cdot \nabla T \leq 0}
$$

Equations générales de la thermo-élasticité

- Equations du mouvement

$$\boxed{\underline{\mathrm{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho\dot{\underline{v}}}$$

- Equation de la chaleur

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{e} - \mathrm{div}\,\underline{q} + h \\ &= \underline{\underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\psi} - s\dot{T} - T\dot{s} - \mathrm{div}\,\underline{q} + h \\ &= \left(\boxed{\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}}\right) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \left(\boxed{s + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial T}}\right)\dot{T} - T\dot{s} - \mathrm{div}\,\underline{q} + h \end{aligned}$$

$$\boxed{-\,\mathrm{div}\,\underline{q} + h = T\dot{s}}$$

- Relations constitutives

$$\boxed{\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) \\ s = -\dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial T}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) \\ \underline{q} = \hat{\underline{q}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \nabla T) \end{cases}}, \qquad \boxed{\hat{\underline{q}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \nabla T) \cdot \nabla T \leq 0}$$

- **Comportement thermo-élastique linéarisé**

- Développement de l'énergie libre au deuxième ordre autour d'un état de référence

$$\hat{\psi}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \boxed{0} + \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - s_0(T - T_0) + \frac{1}{2}\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot (T - T_0)\underline{\underline{a}} - \frac{1}{2}\frac{c}{T_0}(T - T_0)^2$$

par fixation de la constante

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\Big(\underline{\underline{\varepsilon}} - (T - T_0)\underline{\underline{a}}\Big) \\ s = s_0 + c\dfrac{T - T_0}{T_0} + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{a}} \end{cases}$$

T_0 : température de référence

$\underline{\underline{\sigma}}^0$: tenseur des précontraintes

s_0 : entropie de la configuration de référence

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$: tenseur de rigidité

$\underline{\underline{a}}$: tenseur de dilatation thermique

c : capacité calorifique volumique

- Choix d'une configuration de référence naturelle

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{0}}}$$

- Fixation de la valeur arbitraire de l'entropie de référence

$$\boxed{s_0 = 0}$$

$$\boxed{\hat{\psi}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \frac{1}{2}\, \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot (T - T_0)\underline{\underline{a}} - \frac{1}{2}\, \frac{c}{T_0}(T - T_0)^2}$$

T_0 : température de référence naturelle

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$: tenseur de rigidité isotherme

$\underline{\underline{a}}$: tenseur de dilatation thermique

c : capacité calorifique volumique à déformation constante

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \underline{\underline{\sigma}} & = & \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\Big(\underline{\underline{\varepsilon}} - (T - T_0)\underline{\underline{a}}\Big) \\ s & = & c\dfrac{T - T_0}{T_0} + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{a}} \end{array}\right.}$$

- Symétries du tenseur de rigidité

$$\boxed{C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}}$$ petites symétries dues à la symétrie de $\underline{\underline{\sigma}}$ et de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\boxed{C_{ijkl} = C_{klij}}$$ grandes symétries dues à l'existence d'un potentiel

- Symétries du tenseur de dilatation thermique

$$\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$$ symétries dues à la symétrie des déformations

dimension	Tenseur de rigidité	Tenseur de dilatation
1D	1	1
2D	6	2
3D	21	6

nombre de coefficients indépendants

Comportement thermo-élastique linéarisé (suite)

- Développement de la loi de conduction au premier ordre autour de l'état de référence

$$\underline{\hat{q}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \underline{\nabla T}) = \underline{q}^0 + \underline{\underline{\underline{Q}}}\underline{\underline{\varepsilon}} + (T - T_0)\underline{q}^1 - \underline{\underline{K}}\underline{\nabla T}$$

- Conséquences de l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\begin{aligned}\forall(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \underline{\nabla T}), \qquad 0 &\leq \underline{\hat{q}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \underline{\nabla T}) \cdot \underline{\nabla T} \\ &= \left(\underline{q}^0 + \underline{\underline{\underline{Q}}}\underline{\underline{\varepsilon}} + (T - T_0)\underline{q}^1 - \underline{\underline{K}}\underline{\nabla T}\right) \cdot \underline{\nabla T}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \underline{q}^0 & = & \underline{0} \\ \underline{\underline{\underline{Q}}} & = & \underline{\underline{0}} \\ \underline{q}^1 & = & \underline{0} \\ \underline{\underline{K}} & \geq & 0 \end{cases}$$

- Loi de Fourier en première approximation

$$\boxed{\underline{q} = -\underline{\underline{K}}\underline{\nabla T}}, \qquad \boxed{\underline{\underline{K}} \geq 0}$$

$\underline{\underline{\mathrm{K}}}$: tenseur de conductivité thermique

non nécessairement symétrique

- Equations de la thermo-élasticité linéaire anisotrope
  - Equations du mouvement

$$\boxed{\rho \dot{\underline{v}} = \underline{\mathrm{div}} \left(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - (T - T_0) \underline{\underline{a}} \right) \right) + \underline{f}}$$

  - Equation de la chaleur

$$\begin{aligned} 0 &= -\boxed{T}\,\dot{s} - \mathrm{div}\, \underline{q} + h \\ &\approx -T_0 \dot{s} - \mathrm{div}\, \underline{q} + h \\ &= -c\dot{T} - T_0 \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\,\underline{\underline{a}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \mathrm{div} \left(\underline{\underline{K}} \nabla T \right) + h \end{aligned}$$

$$\boxed{c\dot{T} + T_0 \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\,\underline{\underline{a}} \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \mathrm{div} \left(\underline{\underline{K}} \nabla T \right) + h}$$

couplage dû à la dilatation

- Conditions de positivité pour avoir des problèmes bien posés

- Positivité des coefficients d'élasticité

$$\boxed{C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} > 0, \qquad \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \neq \underline{\underline{0}}}$$

- Positivité du coefficient de capacité calorifique

$$\boxed{c > 0}$$

- Positivité des coefficients de conductivité thermique

$$\boxed{K_{ij}g_i g_j \geq 0, \qquad \forall \underline{g} \neq \underline{0}}$$

- Pas de condition sur les coefficients de dilatation

- **Cas d'un matériau isotrope**

- Invariance du potentiel thermodynamique dans toute rotation ou symétrie

$$\hat{\psi}(\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{\underline{Q}}, T) = \hat{\psi}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T), \qquad \forall \underline{\underline{Q}} \ : \ \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$$

$$\Longrightarrow \qquad \hat{\psi} = \hat{\psi}(\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}, T) \qquad \hat{\psi} \text{ fonction des invariants de } \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\varepsilon_I = \operatorname{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{ii}, \qquad \varepsilon_{II} = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \qquad \varepsilon_{III} = \det \underline{\underline{\varepsilon}}$$

- Invariance de la loi de conduction dans toute rotation ou symétrie

$$\underline{\hat{q}}(\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{\varepsilon}}\, \underline{\underline{Q}}, T, \underline{\underline{Q}}\underline{g}) = \underline{\underline{Q}}\, \underline{\hat{q}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T, \underline{g}), \qquad \forall \underline{\underline{Q}} \ : \ \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$$

- Cas linéaire

$$\boxed{\hat{\psi}(\underline{\underline{\varepsilon}}, T) = \frac{1}{2}\lambda(\operatorname{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}})^2 + \mu \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0) \operatorname{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\frac{c}{T_0}(T - T_0)^2}$$

$$\boxed{\underline{q} = k \underline{\nabla T}}$$

$$\begin{array}{rcll}
\text{deux coefficients d'élasticité} & : & (\lambda, \mu) & \text{(coefficients de Lamé)} \\
\text{un coefficient de dilatation} & : & \alpha & (\underline{\underline{a}} = \alpha \underline{\underline{I}}) \\
\text{un coefficient de conductivité thermique} & : & k & (\underline{\underline{K}} = k \underline{\underline{I}}) \\
\text{un coefficient de capacité calorifique} & : & c &
\end{array}$$

- **Cas d'un matériau isotrope (suite)**

- Positivité des coefficients

$$\lambda(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})^2 + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} > 0, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}} \neq \underline{\underline{0}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{3\lambda + 2\mu > 0}, \boxed{\mu > 0}$$

$$\boxed{k > 0}, \qquad \boxed{c > 0}$$

- Coefficients à identifier expérimentalement

$$\begin{array}{rcl} \text{masse volumique} & : & \rho \\ \text{deux coefficients d'élasticité} & : & (\lambda, \mu) \qquad \text{(coefficients de Lamé)} \\ \text{un coefficient de dilatation} & : & \alpha \\ \text{un coefficient de conductivité thermique} & : & k \\ \text{un coefficient de capacité calorifique} & : & c \end{array}$$

matériau	α	c	k	E
	1/°C	N/m²/°C	N/s/°C	N/m²
acier	10^{-5}	$4.\ 10^{6}$	50	$2.\ 10^{11}$
béton	10^{-5}	$2.5\ 10^{6}$	1	$3.\ 10^{10}$
cuivre	10^{-5}	$3.\ 10^{6}$	380	$1.2\ 10^{11}$
bois	$4.\ 10^{-5}$	$2.\ 10^{6}$	0.1	$1.\ 10^{10}$
PMMA	$7.\ 10^{-5}$	$1.5\ 10^{6}$	0.18	$3.\ 10^{9}$

Exemples de réponses thermoélastiques

- ## Equations de la thermo-élasticité linéaire isotrope
  - Equations du mouvement

$$\boxed{\rho \underline{\dot{v}} = \underline{\mathrm{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (\mathrm{Tr}\, \underline{\underline{\varepsilon}})\ \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu)\alpha (T - T_0)\underline{\underline{I}}}$$

  - Equation de la chaleur

$$\boxed{c\dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0\, \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = k \Delta T + h}$$

couplage dû à la dilatation

- ## Relation contrainte-déformation

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}})\;\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\underline{\underline{I}}}$$

- Inversion de la relation contrainte-déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \boxed{\alpha(T - T_0)\underline{\underline{I}}} + \boxed{\frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\;\underline{\underline{I}}}$$

$$\boxed{E = \text{ module de Young}}$$

unité : MPa

$$\boxed{\nu = \text{ coefficient de Poisson}}$$

sans dimension

$$3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}$$

$$\boxed{E > 0}$$

$$\boxed{-1 < \nu < \tfrac{1}{2}}$$

- Ecritures équivalentes

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{th}}$$

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : & \text{déformation élastique} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{\mathrm{th}} : & \text{déformation thermique} = \alpha(T - T_0)\underline{\underline{I}} \end{cases}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}^e = -\frac{\nu}{E}(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}} + \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}}}$$

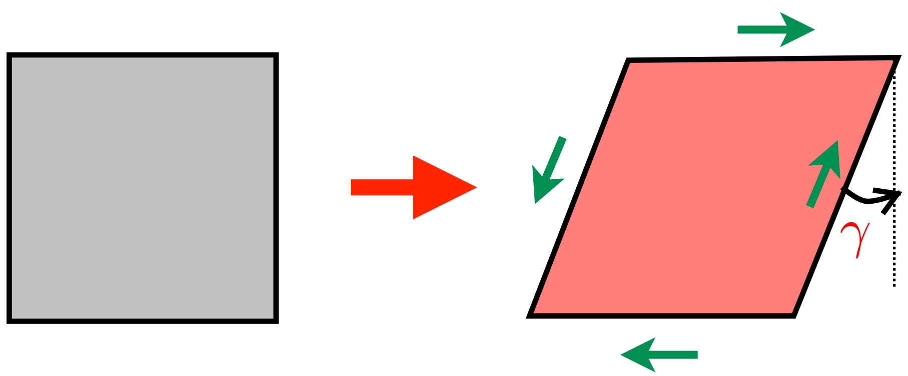
$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \lambda(\mathrm{Tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^e)\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}^e}$$

- ## Réponse à des sollicitations isothermes

$\boxed{T = T_0}$

- Essai de glissement simple

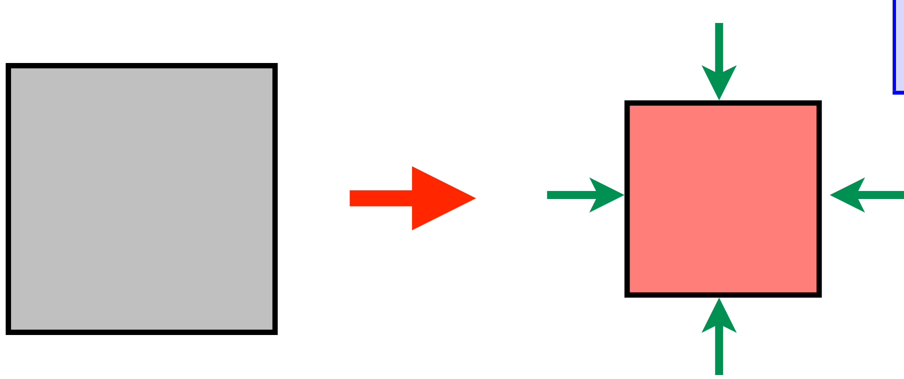
$\boxed{\mu = \text{ module de cisaillement}}$



$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \mu\gamma & 0 \\ \mu\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

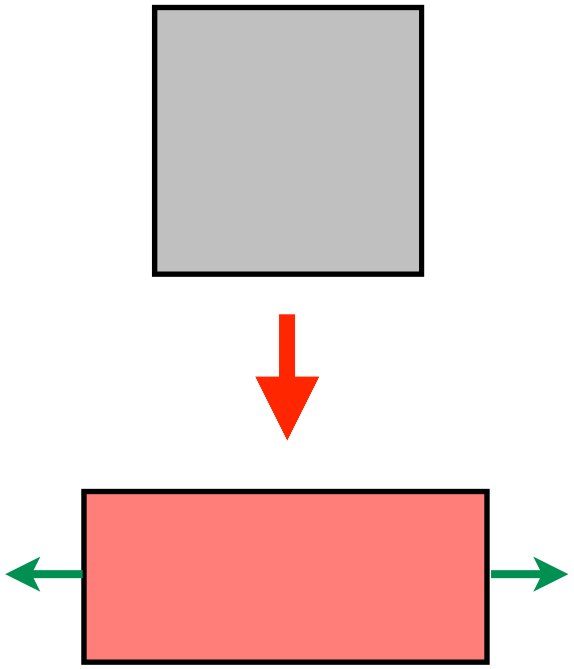
- Essai de contraction sphérique

$\boxed{K := \lambda + \frac{2}{3}\mu = \text{ module de compressibilité isotherme}}$



$$\underline{\underline{\varepsilon}} = e\underline{\underline{I}} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} = \left(\sigma^0 + (3\lambda + 2\mu)e\right)\underline{\underline{I}}$$

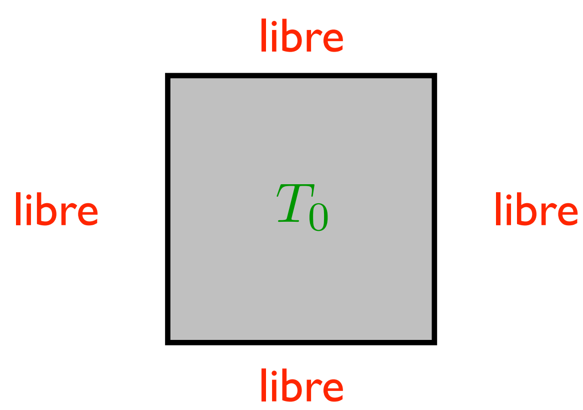
- Essai de traction uniaxiale isotherme



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu\sigma}{E} \end{pmatrix}$$

• Réponse à un chargement en température

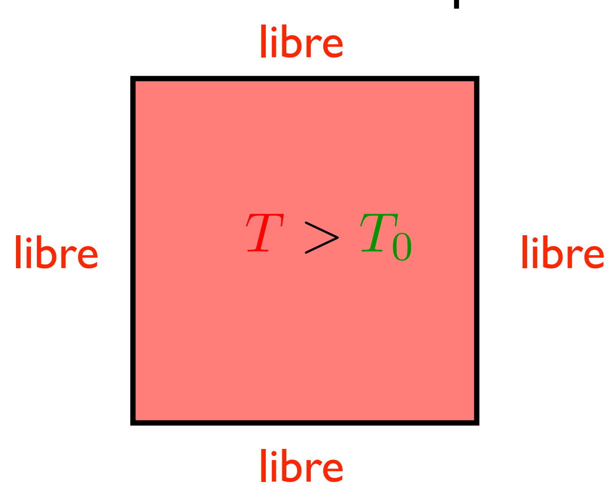
- Configuration de référence naturelle



T_0 : température de référence

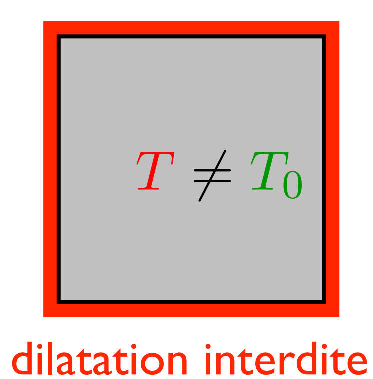
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$$

- Dilatation thermique libre



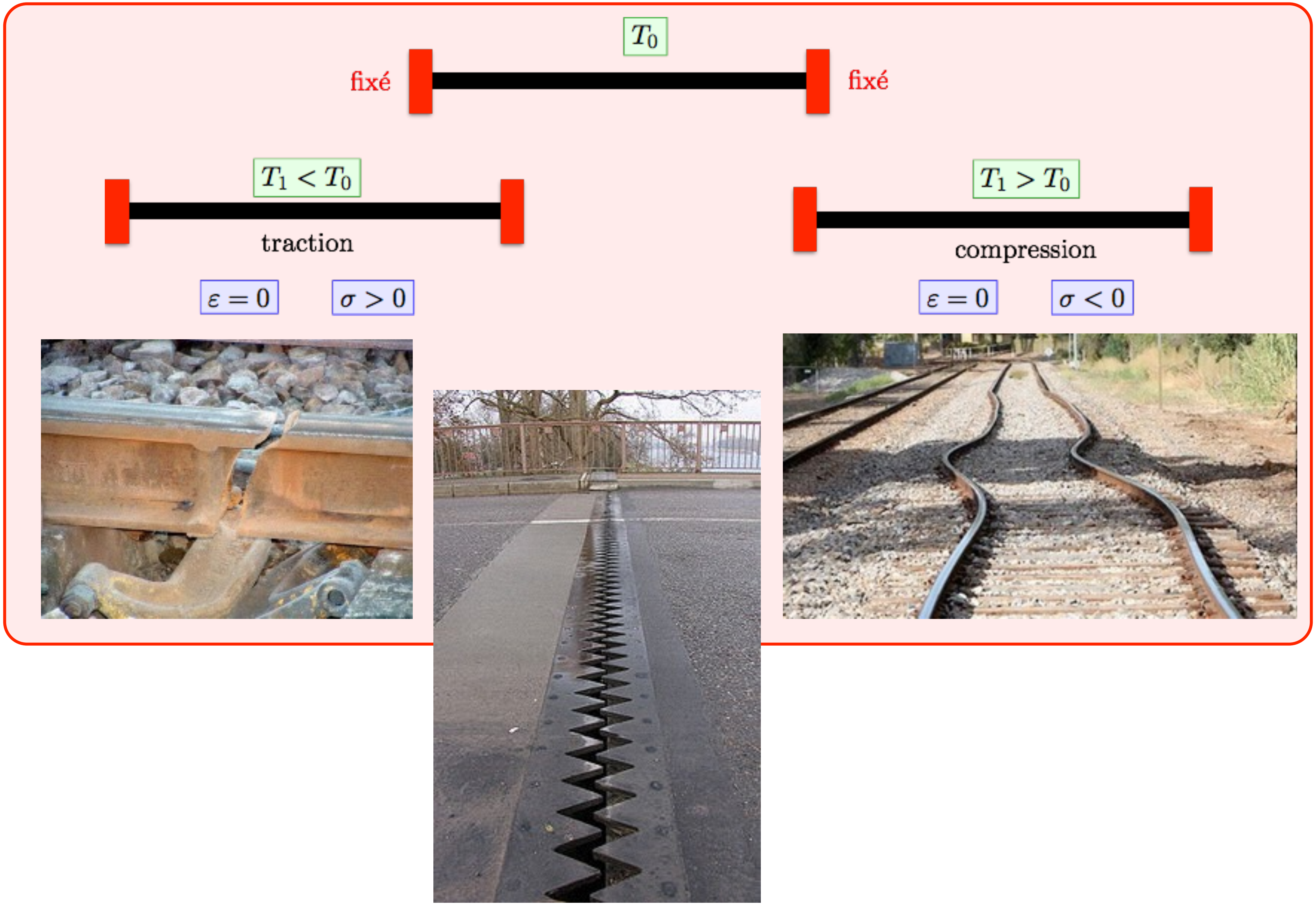
$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \alpha(T - T_0)\underline{\underline{I}}}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$$

- Contrainte thermique due au blocage des déformations



$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}, \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \sigma\underline{\underline{I}}, \qquad \boxed{\sigma = -(3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)}$$

$$\begin{cases} \text{traction} & \text{si} \quad T < T_0 \\ \text{compression} & \text{si} \quad T > T_0 \end{cases}$$


T_0
fixé
fixé
$T_1 < T_0$
traction
$\varepsilon = 0$
$\sigma > 0$
$T_1 > T_0$
compression
$\varepsilon = 0$
$\sigma < 0$

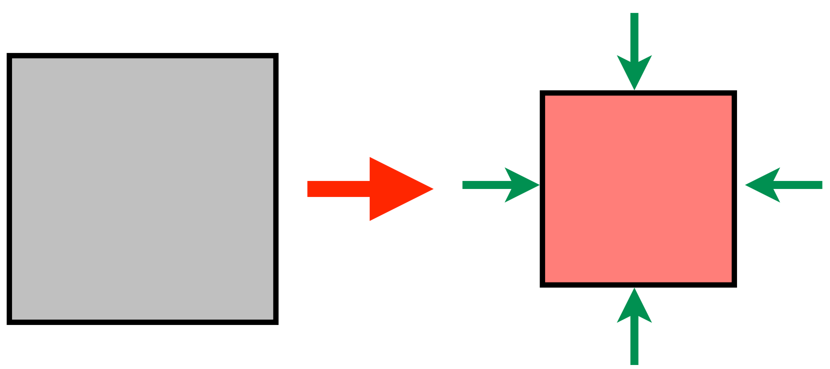
- ## Réponses adiabatiques (isolation thermique)

équation de la chaleur : $\boxed{c\dot{T} + 3K\alpha T_0 \,\mathrm{Tr}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = 0}$

relation contrainte-déformation : $\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \lambda \,\mathrm{Tr}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\,\underline{\underline{I}} + 2\mu\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - 3K\alpha\dot{T}\,\underline{\underline{I}}$

$$\boxed{\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \left(\lambda + \frac{9K^2\alpha^2T_0}{c}\right)\mathrm{Tr}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}\,\underline{\underline{I}} + 2\mu\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}$$

- Essai de cisaillement : idem qu'en isotherme
- Essai de contraction sphérique:



$$\underline{\underline{\varepsilon}} = e\underline{\underline{I}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\sigma}\,\underline{\underline{I}}, \qquad \dot{\sigma} = \left(3K + \frac{9K^2\alpha^2T_0}{c}\right)\dot{e}$$

$$\boxed{K + \frac{3K^2\alpha^2T_0}{c} = \text{ module de compressibilité adiabatique}}$$

pour les matériaux usuels à température ambiante : $\dfrac{3K\alpha^2T_0}{c} \sim 10^{-3}$

- ## Calcul de structures thermo-élastiques

- Mécanique statique + thermique stationnaire

1. On résout l'équation de la chaleur : $k\Delta T + h = 0$, ce qui donne le champ de température $T(x)$.
2. On résout le problème de mécanique avec le champ de température calculé comme donnée et on obtient les champs de déplacement et de contrainte.

couplage faible

- Mécanique (statique ou dynamique) + thermique instationnaire

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{div} \underline{\xi}\ \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) - (3K)\alpha(T - T_0)\underline{\underline{I}}\right) + \underline{f} = \rho \underline{\ddot{\xi}} \\ \\ c\dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0 \operatorname{div} \underline{\xi} = k\Delta T + h \end{cases}$$

couplage fort (sauf si on néglige la dilatation dans l'équation de la chaleur)