Thermodynamique I

(J.-J. Marigo)

Lois de bilan

- Quantité de mouvement
- Energie
- Entropie

Formulation lagrangienne
Cadre HPP

- Bilan de quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{v} dV = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}\, dS + \int_{\mathcal{D}} \underline{f}\, dV$$

- Bilan d'énergie

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \left(e + \tfrac{1}{2}\,\rho \underline{v}\cdot\underline{v}\right) dV = \int_{\partial\mathcal{D}} \left(\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}\cdot\underline{v} - \underline{q}\cdot\underline{n}\right)\, dS + \int_{\mathcal{D}} (\underline{f}\cdot\underline{v} + h) dV$$

- Bilan d'entropie

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} s\, dV \geq -\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\underline{q}}{T}\cdot\underline{n}\, dS + \int_{\mathcal{D}} \frac{h}{T}\, dV$$

ρ	:	masse volumique de référence
$\underline{v}$	:	vecteur vitesse
$\underline{\underline{\sigma}}$	:	tenseur des contraintes
$\underline{f}$	:	forces volumiques
e	:	énergie interne volumique
$\underline{q}$	:	vecteur flux de chaleur
h	:	apport volumique de chaleur
s	:	entropie volumique
T	:	température absolue

ρ	:	masse volumique de référence
$\underline{v}$	:	vecteur vitesse
$\underline{\underline{\sigma}}$	:	tenseur des contraintes
$\underline{f}$	:	forces volumiques
e	:	énergie interne volumique
$\underline{q}$	:	vecteur flux de chaleur
h	:	apport volumique de chaleur
s	:	entropie volumique
T	:	température absolue

- **Bilan local de quantité de mouvement**

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{v} dV = \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n}\, dS + \int_{\mathcal{D}} \underline{f}\, dV, \qquad \forall \mathcal{D}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho \dot{\underline{v}}}$$

ρ	:	masse volumique de référence
$\underline{v}$	:	vecteur vitesse
$\underline{\underline{\sigma}}$	:	tenseur des contraintes
$\underline{f}$	:	forces volumiques
e	:	énergie interne volumique
$\underline{q}$	:	vecteur flux de chaleur
h	:	apport volumique de chaleur
s	:	entropie volumique
T	:	température absolue

- **Bilan local d'énergie**

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}}\left(e+\tfrac{1}{2}\,\rho\underline{v}\cdot\underline{v}\right)dV=\int_{\partial\mathcal{D}}\left(\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n}\cdot\underline{v}-\underline{q}\cdot\underline{n}\right)\,dS+\int_{\mathcal{D}}(\underline{f}\cdot\underline{v}+h)dV, \qquad \forall\mathcal{D}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{e}+\rho\underline{v}\cdot\dot{\underline{v}}=\mathrm{div}(\underline{\underline{\sigma}}^T\underline{v})-\mathrm{div}\,\underline{q}+\underline{f}\cdot\underline{v}+h$$

grâce au bilan de la quantité de mouvement

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{e}=\underline{\underline{\sigma}}\cdot\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}-\mathrm{div}\,\underline{q}+h}$$

ρ	:	masse volumique de référence
$\underline{v}$	:	vecteur vitesse
$\underline{\underline{\sigma}}$	:	tenseur des contraintes
$\underline{f}$	:	forces volumiques
e	:	énergie interne volumique
$\underline{q}$	:	vecteur flux de chaleur
h	:	apport volumique de chaleur
s	:	entropie volumique
T	:	température absolue

- **Bilan local d'entropie**

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} s\,dV \geq -\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\underline{q}}{T}\cdot\underline{n}\,dS + \int_{\mathcal{D}} \frac{h}{T}\,dV, \qquad \forall\mathcal{D}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{s} \geq -\operatorname{div}\left(\frac{\underline{q}}{T}\right) + \frac{h}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$T\dot{s} \geq -\operatorname{div}\underline{q} + h + \frac{\underline{q}}{T}\cdot\nabla T$$

grâce au bilan d'énergie

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}\cdot\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + T\dot{s} - \dot{e} - \frac{\underline{q}}{T}\cdot\nabla T \geq 0}$$

Inégalité de Clausius-Duhem