

Thermodynamique des Processus Irréversibles
Quiberon, 16-22 sept. 2018

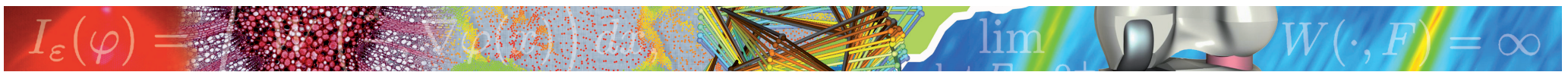
7ème école d'été de mécanique théorique

Effets de couplage et effets dissipatifs accompagnant la déformation des matériaux solides

définitions et résultats expérimentaux

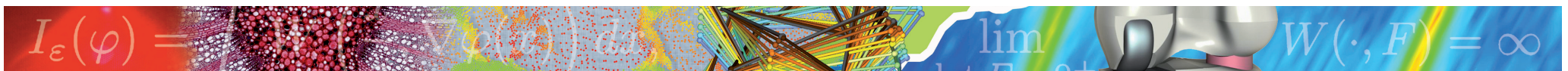
André Chrysochoos
LMGC, UMR 5508 CNRS-UM





Programme

- 1 - Cadre thermomécanique et bilan d'énergie
(TPI-MSG)
- 2 - Quelques éléments rhéologiques à la sauce MSG
(d'une vision mécanique à vision thermomécanique)
- 3 - Analyse expérimentale des bilans d'énergie
(imagerie quantitative)
- 4 - Effet du temps : couplage thm et/ou viscosité ?
(interaction forte et/ou irréversibilité)
- 5 - Effet dissipatif dans les métaux
(fatigue : HCF & VHCF)



Pourquoi utiliser la TPI en mécanique des matériaux ?

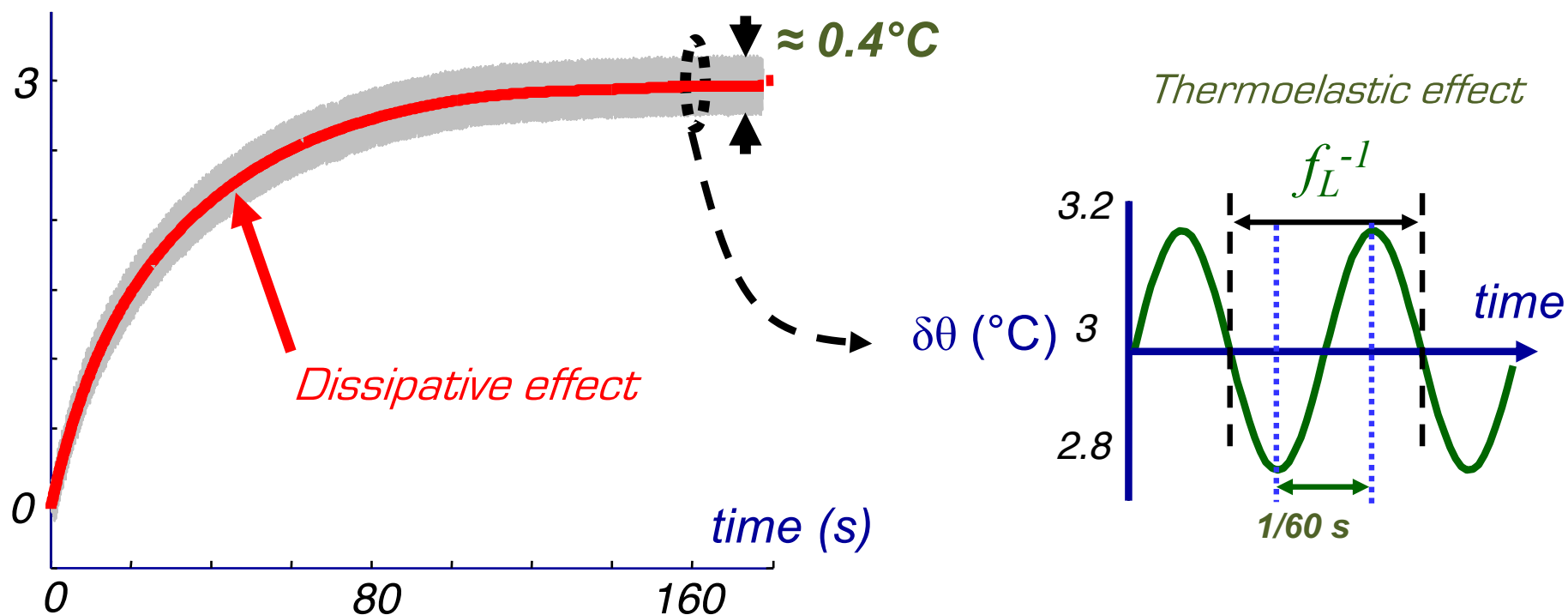
Effets thermiques induits par la déformation
Nature des sources de chaleur

- Deux expériences à faire soi-même :
 - bande de caoutchouc étirée (lèvres = capteurs thermiques)
Gough 1805 : “... bring the middle of the piece into slight contact with the edges of the lips ...”
 - trombone nerveusement malmené (doigts = capteurs thermiques)
- Analyse énergétique du comportement des matériaux
 - énergie de déformation (input)
 - source de couplage : thermo-sensibilité
 - dissipation : irréversibilité, dégradation matérielle

Caractère (an)isotherme des transformations mécaniques

HCF test on DP 600 steel

$$\Delta\sigma = 500 \text{ MPa}, R_\sigma = \sigma_{min}/\sigma_{max} = -1 \text{ et } f_L = 30 \text{ Hz}$$



[Boulanger et al., IJF, 2004]

[Berthel et al., Exp. Mech, 2008]

Qu'entend-on par couplage thermomécanique ?

Interactions mécanique - thermique

“source de couplage”

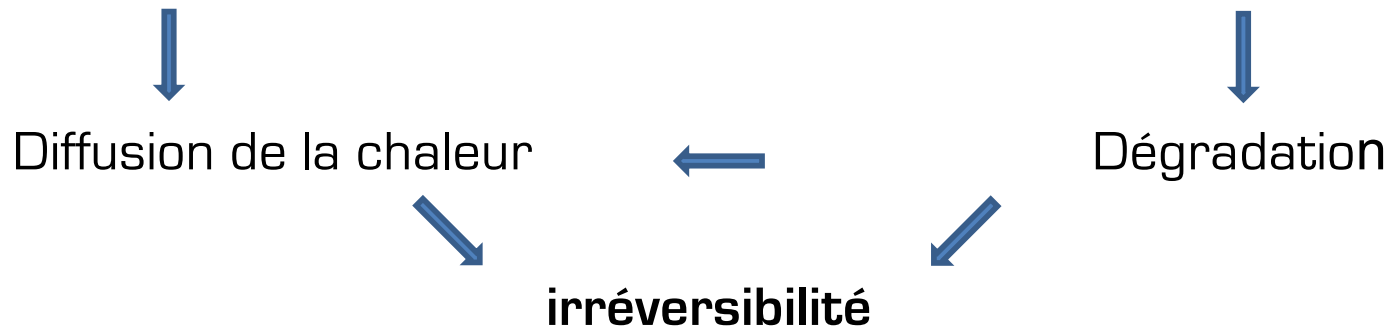
$$s \geq 0, s \leq 0$$

- thermoélasticité
- élas. entropique
- chaleur latente
- ...

“dissipation”

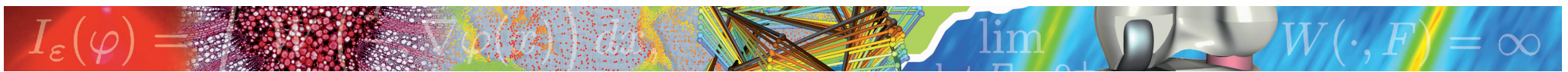
$$s \geq 0$$

- viscosité
- plasticité
- endommagement
- ...



couplage “faible”: θ induite par le chargement

couplage “fort” : effet mécanique induit par θ (induit par le chargement)



-1-

Cadre thermomécanique et bilan d'énergie (TPI-MSG)

D'une mécanique à une thermomécanique des milieux continus

Equations de conservation (cadre mécanique)

Origine	Equation	Nbre	Variable	Nbre
masse	$\dot{\rho} + \rho \operatorname{tr}(\mathbf{D}) = 0$	1	ρ	1
PFD résultante	$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \boldsymbol{\gamma}$	3	\mathbf{x}, \mathbf{u}	3
PFD moment	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$	3	$\boldsymbol{\sigma}$	9
cinématique	$\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$	6	$\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{L}, \mathbf{E}, \dots$	6

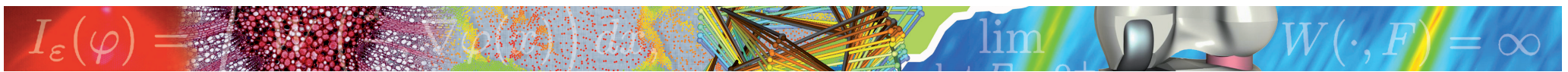
ρ masse volumique
 \mathbf{D} tenseur vitesse de déformation
 $\boldsymbol{\sigma}$ tenseur des contraintes de Cauchy
 \mathbf{f} densité massique de force
 $\boldsymbol{\gamma}$ vecteur accélération

19 inconnues pour 13 équations

Il manque 6 équations

e.g. milieu élastique (H.P.P.)

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$



Equations de comportement (... constitutive, phénoménologique, ...)

● Mécanique

Variables descriptives : *des déformations ou des contraintes*

Equations de comportement : « principes » ou règles de bon sens, causalité, milieu matériellement simple, objectivité, liaisons internes, homogénéité, isotropie, ... propriétés de mémoire, effet de seuil, ...

● Mécanique + Thermodynamique

Gros héritage : fluides (liquide/gaz) → solides 

Variables descriptives : variables d'état, volume /déformation, pression/contraintes, température, proportion de phase, de constituants, variable d'endommagement ...

Deux principes en plus : conservation de l'énergie et irréversibilité des processus physiques

Equations de comportement : ... → cadre MSG ... deux potentiels ... lois d'état et lois complémentaires (d'évolution)

Thermodynamique des processus irréversibles (TPI)

- TPI du proche équilibre [Germain,...(75)]

Thermodynamique des milieux continus (quasi-statique)

- TPI « étendue » [Lebon, Müller, ... (80)],

Thermodynamique des milieux hors équilibre

- TPI « non locale » avec gradient de variables d'état [Bazant, Aifantis,... (90)]

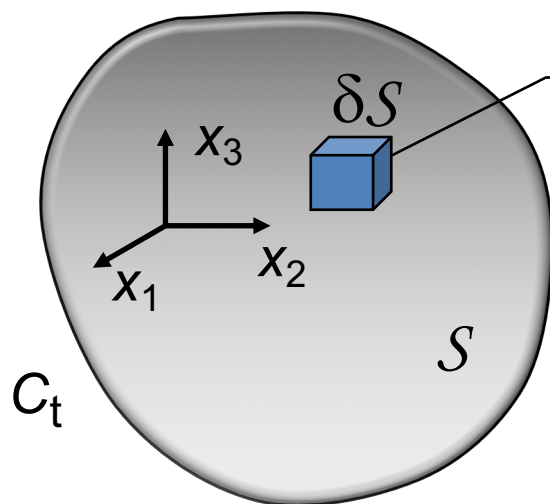
Prise en compte d'aspects non locaux



TPI de «l'état local» (local equilibrium hypothesis)

- système thermodynamique à l'équilibre : n variables d'état
- milieu continu = système thermodynamique
- élément de volume = sous-système thermodynamique
- système hors équilibre = réunion de sous-systèmes en équilibre
- processus quasi-statiques = suite continue d'états d'équilibre
- TPI linéaire [Onsager 30], TPI rationnelle [Coleman, Noll, Trusdell 60], MSG (non linéaire, Moreau, Halphen & Nguyen, 70...)

Variables d'état



T : température ?
 ε : déformation
 $\alpha_j, j = 1, \dots, N$: variables « internes »

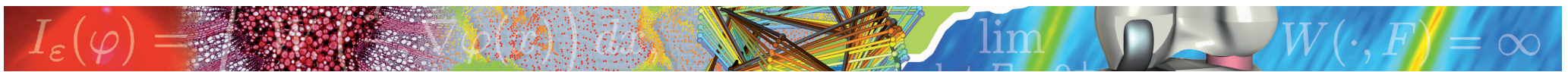
Rq : Variables observables, internes, cachées, de contrôle ...
 Choisir les variables d'état relève de l'acte de foi

Etat local : δS est à l'équilibre

S hors équilibre (+ état local) \rightarrow champs de variables d'état

⚠ : quasi-statique (méca.) \neq quasi-statique (thermo.)

⚠ : extensivité / intensivité, scalaire / tenseur : exemples



Potentiels thermodynamiques

La Thermodynamique introduit 2 potentiels fondamentaux :

E : énergie interne

S : entropie

Pari : il existe un potentiel, fonction d'état (fonction des variables d'état), capable de récapituler les propriétés mécaniques, électriques, magnétiques, physico-chimiques,..., des états d'équilibre du système.

Ces propriétés se traduisent par des lois d'état

Un exemple fameux : loi d'état des gaz parfaits

$$\frac{P}{\rho} = r T$$

P : pression

ρ : masse volumique

r : constante des gaz parfaits

T : température

Energie interne

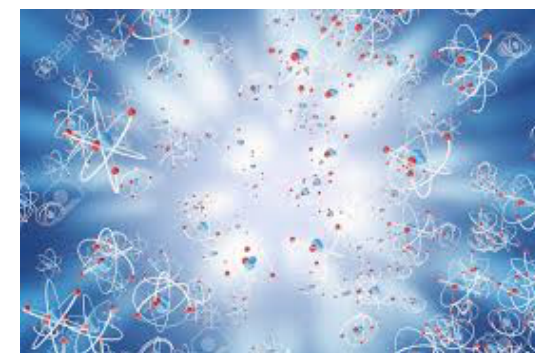
Aspect multi-échelles : M (S hors équilibre), m (δS en équilibre), μ (« entité élémentaire »)

« E est une fonction d'état extensive, égale à la somme de l'énergie cinétique de chaque entité élémentaire de masse non nulle et de toutes les énergies potentielles d'interaction des entités élémentaires du système. En fait, elle correspond à l'énergie intrinsèque du système, définie à l'échelle microscopique, ... »

[P.W. Atkins, Physical Chemistry, Oxford University Press, 1985]



$$E = \sum_{micro} E_{cin} + \sum_{micro} E_{pot}$$



« entités élémentaires » : ions, atomes, électrons, noyaux, nucléons ...

Les énergies cinétiques correspondent aux mouvements des entités élémentaires.

Les énergies potentielles dues aux interactions avec le milieu extérieur par l'intermédiaire de champs, gravitationnel, électrique ou magnétique mais aussi dues aux interactions entre les entités élémentaires ...

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int \sqrt{\varphi'(t)} dt$$

lim

$$W(\cdot, F) = \infty$$

Entropie

R. Clausius (*Théorie mécanique de la chaleur*, 1868)

Energie interne : « contenu de chaleur et d'œuvre »

Entropie : « contenu de transformation »

« Je proposerai donc d'appeler S l'entropie du corps, d'après le mot grec τροπή (transformation).

C'est à dessein que j'ai formé ce mot « entropie » de manière à ce qu'il se rapproche autant que possible du mot énergie, car ces deux quantités ont une telle analogie de leurs significations physiques qu'une certaine analogie de dénomination m'a paru utile » ...



R. Clausius
1822-1888



A. Lincoln
1809-1865

?!

A - Invariance des équations de la mécanique (physique) par inversion du temps ?

Réversibilité ? (micro) Irréversibilité ? (macro)

B - Ensemble des états microscopiques accessibles (Boltzmann, 1877) : $S = k_B \ln(\Omega)$

Notion d'ordre

C - Flèche du temps (Eddington, 1928, Prigogine, 1980)

Indicateur de dégradation : processus réversibles vs. irréversibles.

Patience ! dans un moment, on passera de l'entropie S , généralisation du « Q/T » de S. Carnot (1796-1832) mesurée en $[J \cdot ^\circ C^{-1}]$, à une dissipation, plus « palpable » $[W \cdot m^{-3}]$.

Energie interne vs. entropie

L'entropie, au même titre que l'énergie interne, peut être considérée comme une fonction d'état extensive.

On admettra que :

- E fonction monotone croissante de S

$$\frac{\partial E}{\partial S} = T > 0$$

où T est la température du système à l'équilibre

Rq : Postulat d'Helmholtz ? Lot de variables d'état normales ?



- description énergétique / description entropique

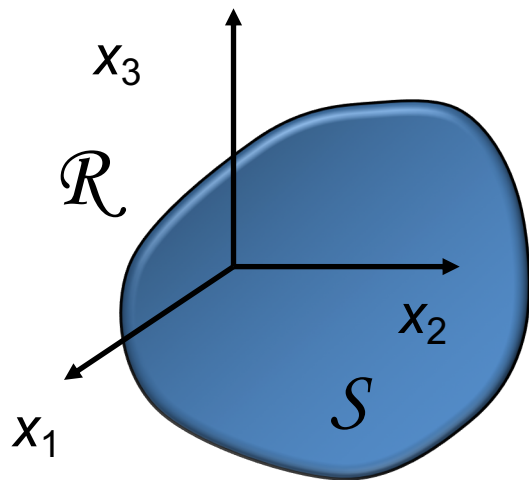
Ici, S sera la 1^{ère} variable d'état

$$E = E(S, \dots)$$

... mais on pourrait partir de ... $S = S(E, \dots)$

[F. Massieu, 1832-1886]

Premier principe



Systeme \mathcal{S} à l'équilibre thermodynamique

$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$: $n + 1$ variables d'état où $\alpha_0 = S$

\mathcal{D} : domaine occupée par \mathcal{S}

$\delta\mathcal{D}$: frontière de \mathcal{S}

Conservation de l'énergie (écriture globale)



$$E = \int_{\mathcal{D}} \rho e \, d\mathcal{D}$$

E : énergie interne

ρ : masse volumique

e : énergie interne spécifique



Rq : surf/vol



$$K = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \rho \, v \cdot v \, d\mathcal{D}$$

K : énergie cinétique

\mathcal{R} : repère galiléen

v : vecteur vitesse

●
$$Q^\bullet = \underbrace{\int_{\mathcal{D}} r_{\text{ext}} d\mathcal{D}}_{\text{volume}} - \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}} q \cdot n d(\partial\mathcal{D})}_{\text{surface}}$$

Q^\bullet : Taux de chaleur reçu
 r_{ext} : source volumique
 q : vecteur courant de chaleur
 n : normale extérieure

⚠ $\left(\right)^\bullet$ le taux dépend du chemin suivi i.e. Q n'est pas une fonction d'état

● $\mathcal{E} = E + K$ Energie totale du système

● $P_{\text{ext}} = \int_{\mathcal{D}} f_{\text{ext}} \cdot v d\mathcal{D}$ Puissance des efforts extérieurs

Premier Principe : conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = \frac{d}{dt} (E + K) = P_{\text{ext}} + Q^\bullet \tag{1}$$

Théorème de l'énergie cinétique

Si on définit la **puissance des quantités d'accélération** ...

●
$$P_a = \int_{\mathcal{D}} \rho \gamma \cdot v \, d\mathcal{D} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho v \cdot v \, d\mathcal{D} = \frac{d}{dt} K$$

... et la **puissance des efforts intérieurs**

●
$$P_{\text{int}} = - \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij} D_{ij} \, d\mathcal{D} \quad \sigma : \text{contrainte} ; \mathbf{D} : \text{vitesses de déformation}$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt} K = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} \quad (2)$$

(1)+(2) donne une « nouvelle » formulation du 1^{er} principe

$$\frac{d}{dt} E = -P_{\text{int}} + Q^\bullet$$



$$(dU = -p\delta V + \delta Q)$$

Écriture locale du 1^{er} principe

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho e d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij} D_{ij} d\mathcal{D} + \int_{\mathcal{D}} r_{\text{ext}} d\mathcal{D} - \int_{\partial\mathcal{D}} q \cdot n d(\partial\mathcal{D})$$

conservation de la masse + théorème de la divergence

$$\rho \dot{e} = \sigma : D + r_{\text{ext}} - \text{div} q$$

Rq : $\sigma : D$ c'est au signe près, la puissance des efforts intérieurs.
On introduit parfois la **taux d'énergie (volumique) de déformation**

$$W_{\text{def}}^{\bullet} = \sigma : D$$

Attention, cette énergie n'est pas *a priori* une fonction d'état.

Écriture du 2nd principe

Comme pour l' énergie interne, on suppose que l' on peut écrire :

$$S = \int_{\mathcal{D}} \rho s \, d\mathcal{D}$$

On définit par ailleurs le taux de S_{ext} , dont le taux s'écrit :

$$S_{\text{ext}}^\bullet = \int_{\mathcal{D}} \frac{r_{\text{ext}}}{T} \, d\mathcal{D} - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{q}{T} \cdot n \, d(\partial\mathcal{D})$$

Rq : lorsque le système est monotherme $S_{\text{ext}}^\bullet = \frac{Q^\bullet}{T}$

On retrouve alors le fameux $dS = \delta Q/T$ de la thermodynamique « classique » pour des processus réversibles. Pour des processus irréversibles on écrit : $dS > \delta Q/T$... C'est bien ce que l'on va faire dans le cas général ... en développant ce que représente la différence $dS - \delta Q/T$...

Le second principe affirme que l'entropie S du système (ou d'un sous-système) vérifie, lors de toute évolution réelle, l'inégalité suivante :

$$\frac{d}{dt} S - S_{\text{ext}}^{\bullet} = S_{\text{int}}^{\bullet} \geq 0$$

S_{int}^{\bullet} source interne (globale) d'entropie.

L'inégalité traduit l'irréversibilité des processus physiques ! La source interne d'entropie est positive. (« *l'entropie d'un système isolé ne peut que croître* »)

écriture locale du second principe

conservation de la masse + théorème de la divergence

$$\rho \dot{s} - \frac{r_{\text{ext}}}{T} + \text{div} \left(\frac{q}{T} \right) = s_{\text{int}}^{\bullet} \geq 0$$

Inégalité de Clausius-Duhem et dissipation (I)

Une nouvelle façon d'écrire localement le 2nd principe
via une combinaison de l'écriture des 2 principes

$$\rho \dot{e} = \sigma : D + r_{\text{ext}} - \text{div} q$$

$$\rho \dot{s} - \frac{r_{\text{ext}}}{T} + \frac{1}{T} \text{div} q - \frac{\text{grad} T \cdot q}{T^2} \geq 0 \quad \times T$$

Inégalité de Clausius Duhem

$$\rho(T\dot{s} - \dot{e}) + \sigma : D - \frac{q}{T} \cdot \text{grad} T \geq 0$$

Avec

$$\begin{cases} e = e(s, \alpha_j), j = 1, \dots, n \\ T = \frac{\partial e}{\partial s} = e_{,s} \end{cases}$$

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int \sqrt{\varphi'(t)} dt$$

$$\lim_{F \rightarrow \infty} W(\cdot, F) = \infty$$

Transformation de Legendre : « machine à potentiels »

On peut définir une nouvelle fonction d'état : l'énergie libre, transformée de Legendre de l'énergie interne par rapport à l'entropie.

$$\begin{cases} \psi = e - Ts \\ \psi = \psi(T, \alpha_j), j = 1, \dots, n \\ s = -\psi_{,T}; \psi_{,\alpha_j} = e_{,\alpha_j}, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Remarque 1 : On ne change pas la physique ! Tr. Lg. permet de remplacer une variable d'état descriptive par sa ... **variable conjuguée** ; e.g. ici (s, T) , mais aussi en thermodynamique classique (V, P) , (n_i, μ_i) , ... potentiels de Massieu (1860) ... (n_i : nombre de moles du constituant i)

Machine à fabriquer des potentiels. Exemple fameux :

énergie interne $\rightarrow (s, T) \rightarrow$ énergie libre

énergie interne $\rightarrow (V, P) \rightarrow$ enthalpie

etc ...

Très gros intérêt pour l'expérimentateur

Mais attention : potentiel convexe - quid des changements de phase - des instabilités ? 

- **Remarque 2** : Une certaine thermodynamique propose d'utiliser un lot de variables d'état extensives associées à l'énergie interne.
Prenons classiquement $\{S, V, n_i\}$.
Le caractère extensif de ces variables permet de supposer que l'énergie interne est une fonction positivement homogène d'ordre 1, i.e.:

$$e(\lambda S, \lambda V, \lambda n_i) = \lambda e(S, V, n_i) \quad \forall \lambda > 0$$

D'après le théorème d'Euler et la définition des variables conjuguées de S, V, n_i , on obtient une forme classique et très utilisée de l'énergie interne :

$$e(S, V, n_i) = TS - PV - \sum_i \mu_i n_i$$

où μ_i est ce que l'on appelle le *potentiel chimique* du constituant i .

Attention, ceci « vous implique » très fortement pour la suite ! Il faut utiliser des variables extensives... et par exemple, il sera impossible de supposer par la suite que les lois d'état s'écrivent comme des relations linéaires des variables d'état (e.g. élasticité) ...

Inégalité de Clausius-Duhem et dissipation (II)

Revenons à l'inégalité fondamentale On avait :

$$\rho(T\dot{s} - \dot{e}) + \sigma : D - \frac{q}{T} \cdot \text{grad}T \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \psi = e - Ts \\ \psi = \psi(T, \alpha_j), \quad j = 1, \dots, n \\ s = -\psi_{,T}; \quad \psi_{,\alpha_j} = e_{,\alpha_j}, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

En utilisant les propriétés de l'énergie libre, on obtient :

$$\underbrace{d}_{\text{dissipation}} = \underbrace{\sigma : D - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \cdot \dot{\alpha}_j}_{\text{intrinsèque } (d_1)} - \underbrace{\frac{q}{T} \cdot \text{grad}T}_{\text{thermique } (d_2)} \geq 0$$

On suppose souvent que les dissipations sont séparément positives, et ceci lors de tout processus (**réel !!**).

$$d_1 \geq 0 \quad d_2 \geq 0$$

Rq : $d = d_1 + d_2 = T \dot{S}_{int}$

Bibliographie

...

N. Boccara

H. Callen

J. Coirier

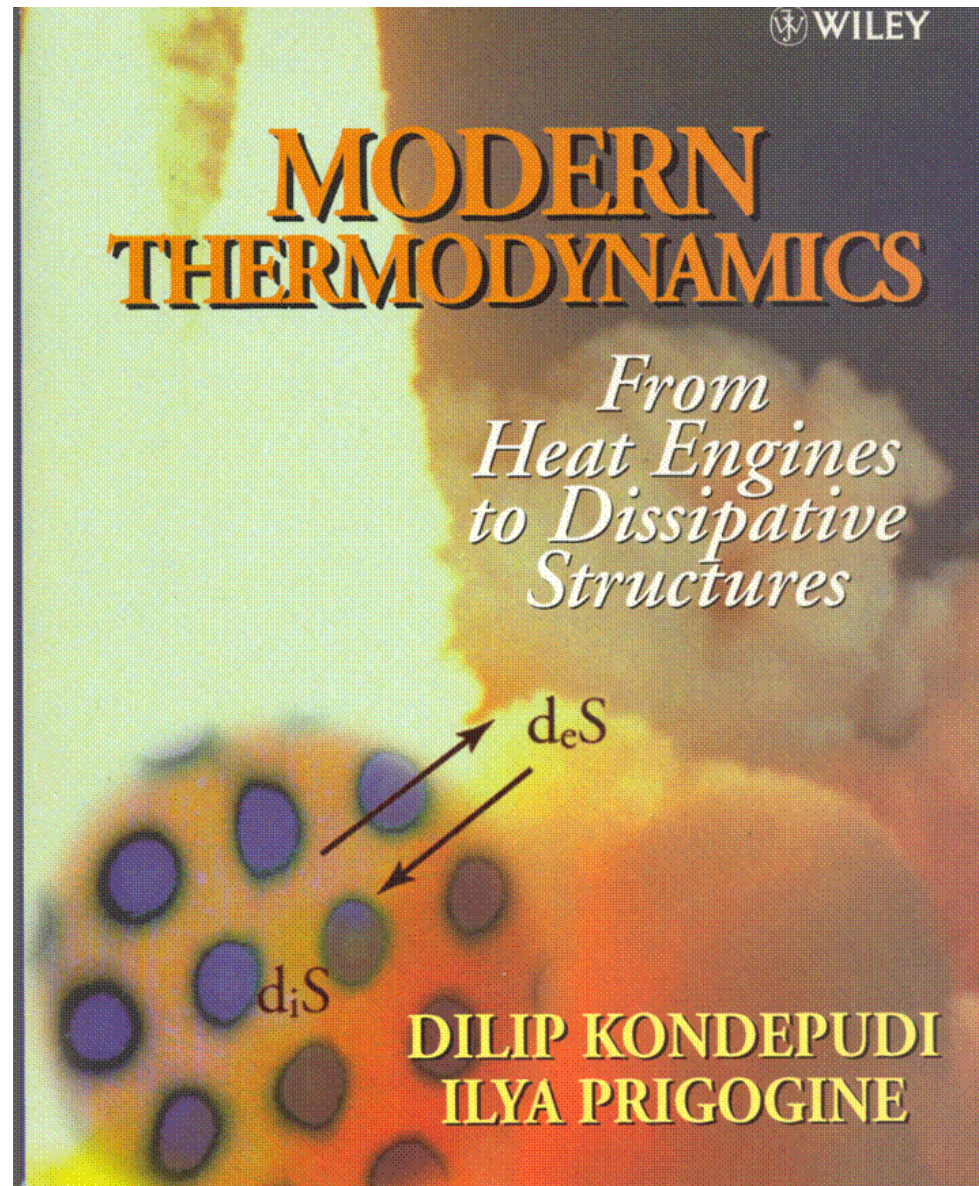
P. Germain

J. Leblond

I. Müller

P. Papon

...



$$dS = d_e S + d_i S \quad d_i S \geq 0$$

Equation de la chaleur

Deux écritures du taux d'énergie interne

$$\rho \dot{e} = \sigma : D + r_{\text{ext}} - \text{div} q = \rho T \dot{s} + \rho e_{,\alpha_j} \cdot \dot{\alpha}_j$$

Or $s = -\psi_{,T}(T, \alpha_j)$ d'où :

$$\rho T \dot{s} = \underbrace{-\rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}}_{-C_\alpha} \dot{T} - \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \alpha_j} \cdot \dot{\alpha}_j = \rho C_\alpha \dot{T} - \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \alpha_j} \cdot \dot{\alpha}_j$$

$$\underbrace{\rho C_\alpha \dot{T}}_{\text{absorption}} + \underbrace{\text{div} q}_{\text{fuites}} = \underbrace{\sigma : D}_{-p_{\text{int}}} - \underbrace{\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \cdot \dot{\alpha}_j}_{p_b} + \underbrace{\rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \alpha_j} \cdot \dot{\alpha}_j}_{\text{couplages}} + \underbrace{r_{\text{ext}}}_{\text{"origine extérieure"}}$$

Unité : puissance volumique [W.m⁻³] C_α : chaleur spécifique [J.kg⁻¹.K⁻¹].

Bilan de puissance

- Puissance des efforts intérieurs

$$\underbrace{-\rho_{\text{int}}}_{\sigma : D} = \underbrace{d_1}_{\text{dissipée}} + \underbrace{\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \cdot \dot{\alpha}_j}_{\text{non dissipée}}$$

- Puissance calorifique mise en jeu

$$\underbrace{w_{\text{ch}}^{\bullet}}_{\text{puissance calorifique}} = \underbrace{d_1}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \alpha_j} \cdot \dot{\alpha}_j}_{\text{couplages}} + \underbrace{r_{\text{ext}}}_{\text{extérieur}}$$

- Fuites calorifiques par conduction dans le milieu

Loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \text{grad } T \quad \left(q_i = -K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$$

K : tenseur des conductions (symétrique défini positif)

Lois d'état

Variables d'état : En mécanique des matériaux, on prend (hélas, encore trop peu souvent !) la température, (souvent) une mesure (tensorielle) de déformation, et un lot de variables complétant la description de l'état thermodynamique (vecteur α lié à la microstructure, aux proportions de phase,...) : (T, ε, α)

Potentiel : on prend alors par construction, l'énergie libre (de Helmholtz) :

$$\psi = \psi(T, \varepsilon_{ij}, \alpha_k) \quad k = 2, \dots, n$$

Equations d'état : elles définissent les variables conjuguées des variables d'état



Propriétés des états d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} s = -\psi_{,T} \quad (s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}) \\ \frac{\sigma^r}{\rho} = \psi_{,\varepsilon} \quad (\sigma^r_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}) \\ \frac{A_\alpha}{\rho} = \psi_{,\alpha} \quad (A_{\alpha_k} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_k}) \end{array} \right.$$

contrainte réversible



Faisons les comptes !

Inconnues	Nombre	Equations	Nombre
ρ : masse spécifique	1	continuité	1
u : déplacement	3	mouvement	3
T : température	1	énergie (chaleur)	1
ε, E, L : déformations	6	équations géométriques	6
α_p : variables «internes»	p	Ψ donnée (1 ^{er} cadeau du jour)	
s : entropie	1	$s = -\psi_{,T}$: loi d'état	1
σ^r : contrainte réversible	6	$\sigma^r = \psi_{,\varepsilon}$: loi d'état	6
A_p : variables conjuguées	p	$A_\alpha = \psi_{,\alpha}$: lois d'état	p
q : flux de chaleur	3	$q = -K \cdot \text{grad } T$?! (2 nd cadeau !)	 3
σ : contrainte	6		
<i>Total "inconnues" :</i>	$2p + 27$	<i>Total "équations" :</i>	$p + 21$

Il manque $p + 6$ équations

Lois complémentaires (d'évolution)

Le cas de la dissipation intrinsèque :

$$d_1 = \underbrace{\sigma : D}_{\text{"force"}} + \underbrace{\left(-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \right) \cdot \dot{\alpha}_j}_{\text{"flux"}} \geq 0 \quad j = 1, \dots, p$$

En H.P.P. $\alpha_1 = \varepsilon, \dot{\alpha}_1 = \dot{\varepsilon} \approx D$

$$d_1 = \underbrace{(\underbrace{\sigma - \sigma^r}_{\text{"force"}})}_{\text{"force"}} : \underbrace{\dot{\varepsilon}}_{\text{"flux"}} + \underbrace{\left(-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \right)}_{\text{"force"}} \cdot \underbrace{\dot{\alpha}_j}_{\text{"flux"}} \geq 0 \quad j = 2, \dots, p$$

$$d_1 = \sum_{j=1}^p \underbrace{X_j}_{\text{"force"}} \cdot \underbrace{\dot{\alpha}_j}_{\text{"flux}} \geq 0$$

*Le produit « • »
dépend de l'ordre
de tensorialité*

En raisonnant sur la structure de la dissipation (source d'entropie pour certains), on peut proposer une règle de correspondance entre forces thermodynamiques et flux.

TPI linéaire : correspondance linéaire entre forces et flux.

$$\begin{bmatrix} F \\ O \\ R \\ C \\ E \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ L \\ U \\ X \end{bmatrix}$$

TPI-Lin.

L tenseur des coefficients cinétiques : symétrique (Onsager, 1931), défini et positif.


OK pour les fluides (liquides + gaz), pour certains matériaux (viscoélasticité linéaire).

Une TPI non linéaire : Matériaux Standards Généralisés

Moreau [70], Halphen et Nguyen [75],
 Germain, Suquet, Nguyen [85], Lubliner [90] ...

Pour le lot de variables d'état : $\{T, \varepsilon_{kl}, \alpha_{j=1,\dots,p}\}$

le formalisme des MSG postule l'existence d'une fonction convexe

$$\varphi(q, \dot{\varepsilon}_{kl}, \dot{\alpha}_p; \underbrace{T, \varepsilon_{kl}, \alpha_j}_{\text{paramètres}})$$


par rapport aux variables de flux, positive, minimale et nulle en $(0,0,\dots,0)$ telle que les lois complémentaires soient définies, lorsque φ est différentiable, par :

$$\sigma_{ij}^{ir} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \quad (+6 \text{ équations}) \quad X_p = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_p} \quad (+p \text{ équations})$$


2^{ème} cadeau $-\frac{\partial T / \partial x_i}{T} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \quad \left(\text{on veut } q_i = -K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)$



La fonction φ est appelée potentiel de dissipation. Les lois complémentaires (d'évolution) dérivent du potentiel de dissipation.

Les propriétés mathématiques du potentiel assurent la positivité de la dissipation (et donc du second principe) quels que soient les flux des variables d'état associées au modèle de comportement.

Remarques importantes :

● $\sigma = \sigma^r + \sigma^{ir} \rightarrow \sigma \neq \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \text{ dès que } \sigma^{ir} \neq 0$ 

« La contrainte dérive d'un potentiel »



NON !! Pas forcément.

● $-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} = -A_j = X_j \rightarrow A_j \neq X_j$



Attention à la différence entre force thermodynamique et variable conjuguée !

Le cas de la dissipation thermique :

$$d_2 = - \underbrace{\frac{\text{grad} T}{T}}_{\text{"force"}} \cdot \underbrace{q}_{\text{"flux"}} \geq 0$$

Avec :

$$\varphi_2(q; T) = \frac{1}{2T} q : K^{-1} : q = \frac{1}{2T} K_{ij}^{-1} q_i q_j$$

On retrouve bien la loi de Fourier :

$$q = -K \text{ grad } T$$

Récapitulatif

Variables d'état	
Comment décrire le matériaux	
Potentiel thermodynamique	Lois d'état
Comment le matériau gère l'énergie	
Potentiel des dissipations	Lois d'évolution
Quel est le niveau d'irréversibilité de tel mécanisme	

Bilan d'énergie		
Taux d'énergie		Relations importantes
de déformation	$w_{def}^{\dot{}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$	$w_{def} = w_d + w_s + w_e$
dissipée (intr.)	$w_d^{\dot{}} = d_1$	$w_h = w_d + w_{thc}$
élastique	$w_e^{\dot{}}$	$w_d^{\dot{}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - A_j \dot{\alpha}_j$
stockée	$w_s^{\dot{}}$	$w_{sto}^{\dot{}} = w_e^{\dot{}} + w_s^{\dot{}}$
de couplage thm	$w_{thc}^{\dot{}}$	$w_h^{\dot{}} = w_{thm}^{\dot{}} + w_d^{\dot{}}$

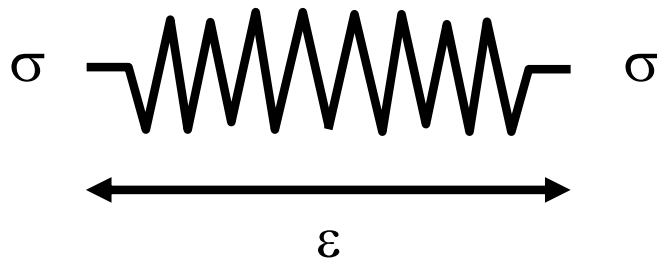
- 2 -

Quelques éléments rhéologiques à la sauce MSG



Comportement élastique isotherme

Caractéristiques Physiques



$$\sigma = E \varepsilon$$

$$d_1 = 0$$

Stocke tout !!
Ne dissipe rien !!

Modélisation thermomécanique

Variables d'état

$$\{T = T_0, \varepsilon\}$$

Energie libre (volumique)

$$\psi(T = T_0, \varepsilon) = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

Potentiel de dissipation

$$\varphi(\dot{\varepsilon}) \equiv 0$$

Loi d'état

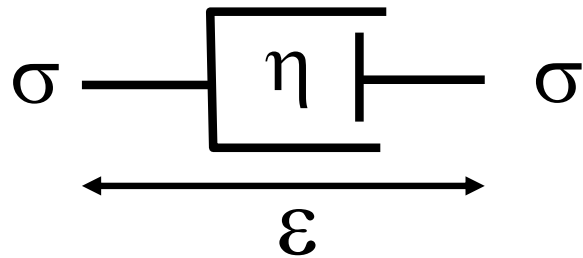
$$\sigma^r = \psi_{,\varepsilon} = E \varepsilon$$

Loi complémentaire

$$\sigma^{ir} = \varphi_{,\dot{\varepsilon}} = 0 ; d_1 = \sigma^{ir} \dot{\varepsilon} = 0$$

Comportement visqueux isotherme

Caractéristiques Physiques



$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$$

$$d_1 = \sigma \dot{\varepsilon} = \eta \dot{\varepsilon}^2$$

Ne stocke rien !!

Dissipe tout !!

Modélisation thermomécanique

Variables d'état

$$\{T = T_0, \varepsilon\}$$

Energie libre (volumique)

$$\psi(T = T_0, \varepsilon) \equiv 0$$

Potentiel de dissipation

$$\varphi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}^2$$

Loi d'état

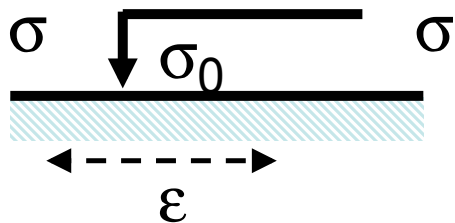
$$\sigma^r = \psi_{,\varepsilon} = 0$$

Loi complémentaire

$$\sigma^{ir} = \varphi_{,\dot{\varepsilon}} = \eta \dot{\varepsilon}$$

Comportement plastique parfait isotherme

Caractéristiques Physiques



$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| < \sigma_0 \\ 0, & \text{si } |\sigma| = \sigma_0 \text{ et } \frac{d}{dt}|\sigma| < 0 \\ \lambda \frac{\sigma}{|\sigma|}, \lambda \in \mathbb{R}^{*+} & \text{si } |\sigma| = \sigma_0, \frac{d}{dt}|\sigma| = 0 \end{cases}$$

$$d_1 = \sigma_0 |\dot{\varepsilon}|$$

Ne stocke rien !! Dissipe tout !!

Modélisation thermomécanique

Variables d'état

$$\{T = T_0, \varepsilon\}$$

Energie libre (volumique)

$$\psi(T = T_0, \varepsilon) \equiv 0$$

Potentiel de dissipation

$$\varphi(\dot{\varepsilon}) = \sigma_0 |\dot{\varepsilon}|$$

Loi d'état

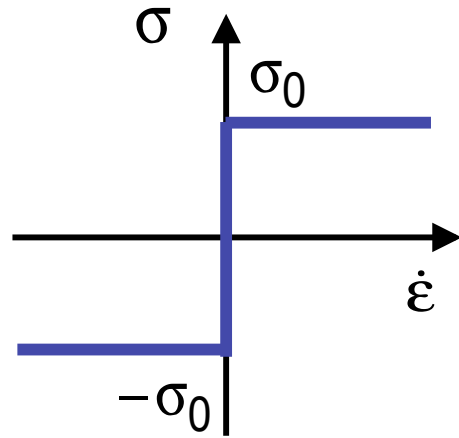
$$\sigma^r = \psi_{,\varepsilon} = 0$$

Loi complémentaire

$$\sigma^{ir} = " \varphi_{,\dot{\varepsilon}} " = \begin{cases} \sigma_0 \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) & \text{si } \dot{\varepsilon} \neq 0 \\ |\sigma| < \sigma_0 & \text{si } \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

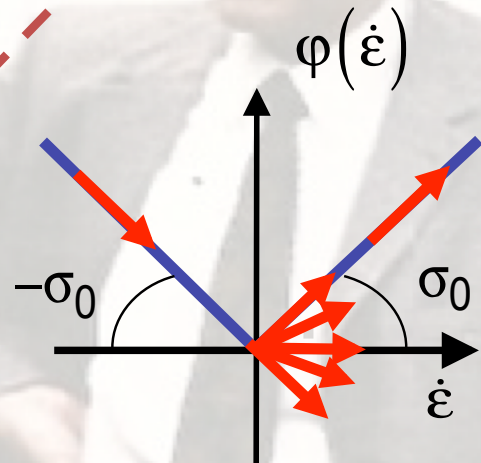
$$I_\varepsilon(\varphi) = \int \sqrt{\varphi'(t)} dt$$

$$\lim_{F \rightarrow \infty} W(\cdot, F) = \infty$$



1

$$\sigma^{ir} = \begin{cases} \sigma_0 \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}) & \text{si } \dot{\varepsilon} \neq 0 \\ |\sigma| < \sigma_0 & \text{si } \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$



2

Analyse convexe :
fonction indicatrice

sous-différentielle

$$\sigma^{ir} \in \partial\varphi$$

$$\partial\varphi = \begin{cases} \partial\varphi/\partial\dot{\varepsilon} = \pm\sigma_0 \\ -\sigma_0 < \sigma < +\sigma_0 \end{cases}$$

3

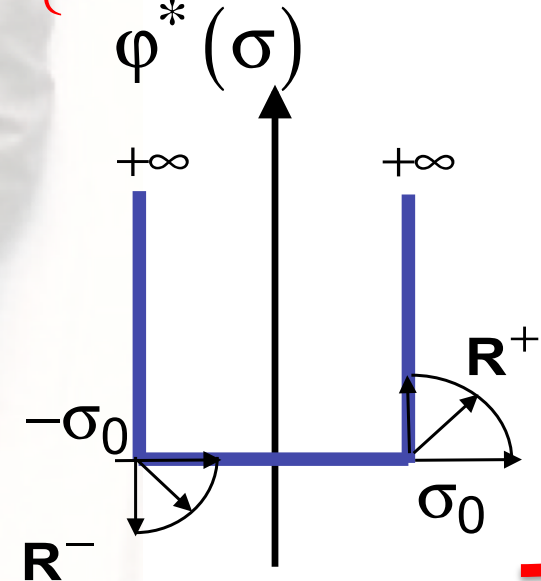
Fonction seuil

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_0 \leq 0$$

Forme duale

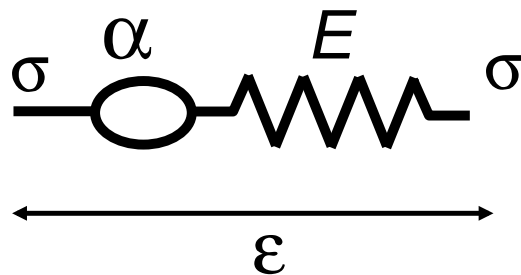
$$\dot{\varepsilon} \in \partial\varphi^*$$

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{si } -\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 \\ \lambda \frac{\sigma}{|\sigma|} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \lambda \in \mathbb{R}^+ & \text{si } |\sigma| = \sigma_0 \end{cases}$$



Comportement thermoélastique linéaire

Caractéristiques Physiques



$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \theta$$

$$C = C_0, \theta \ll T_0$$

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = -\frac{\text{grad}T}{T} \cdot q \end{cases}$$

Stockage méca. & therm. !

Dissipation thermique !

(diffusion de la chaleur, ici ?!)



Modélisation thermomécanique

$$\{\theta = T - T_0, \varepsilon\}$$

$$\psi(\theta, \varepsilon) = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \lambda_{th} \theta)^2 - \frac{\rho_0 C_0}{2T_0} (1 + \chi) \theta^2$$

$$\sigma^r = \psi_{,\varepsilon} = E (\varepsilon - \lambda_{th} \theta)$$

$$s = -\psi_{,T} = \frac{\rho_0 C_0}{T_0} (1 + \chi) \theta$$

$$\varphi(\dot{\varepsilon}, q; T) = \frac{1}{2T} q \cdot K^{-1} q$$



s volumique

$$\chi = \frac{E \lambda_{th}^2 T_0}{\rho_0 C_0}$$

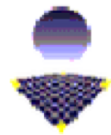
$$\sigma^{ir} = \varphi_{,\varepsilon} = 0$$

$$-\frac{\text{grad}T}{T} = \varphi_{,q} = \frac{K^{-1} q}{T} \quad (q = -K \text{grad}T)$$

Effets thermo-élastiques

Gough 1805, Joule 1857, Lord Kelvin, 1880

Techniques microcalorimétriques



...
100
years
later
...

Essai cyclique (domaine "thermoélastique")

$R = 0$, $\Delta\sigma = 360$ MPa, fréquence = 1 Hz

Matériau : acier pour emboutissage

IR thermography

1990

Equipe Thermomécanique des Matériaux

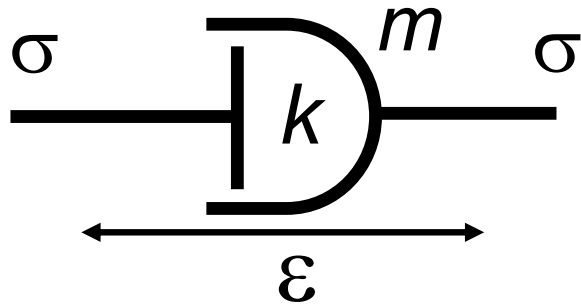
Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil - UMR 5508

Université Montpellier II

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_V \varphi(\dot{\varepsilon}) \, dV$$

Viscosité non linéaire

Caractéristiques Physiques



$$\sigma = k |\dot{\varepsilon}|^m \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon})$$

$$d_1 = \sigma \cdot \dot{\varepsilon} = k |\dot{\varepsilon}|^{m+1}$$

Ne stocke rien !

Dissipe tout !

Modélisation thermomécanique

Variables d'état

$$\{T = T_0, \varepsilon\}$$

Energie libre (volumique)

$$\psi(T = T_0, \varepsilon) \equiv 0$$

Potentiel de dissipation

$$\varphi(\dot{\varepsilon}) = \frac{k}{m+1} |\dot{\varepsilon}|^{m+1}$$

Loi d'état

$$\sigma^r = \psi_{,\varepsilon} = 0$$

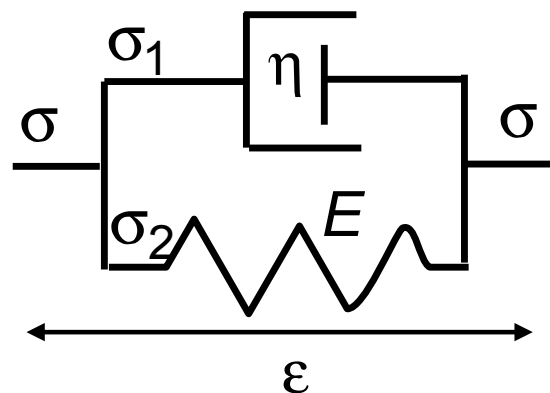
Loi complémentaire

$$\sigma^{ir} = k |\dot{\varepsilon}|^m \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon})$$

Comportement viscoélastique linéaire isotherme

Kelvin-Voigt

Caractéristiques Physiques



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \eta \dot{\varepsilon} \\ \sigma_2 = E \varepsilon \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \end{array} \right.$$

← amortisseur

← ressort

← structure //

Modélisation thermomécanique

$$\{T = T_0, \varepsilon\}$$

$$\psi(T = T_0, \varepsilon) = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

$$\varphi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}^2$$

Loi d'état

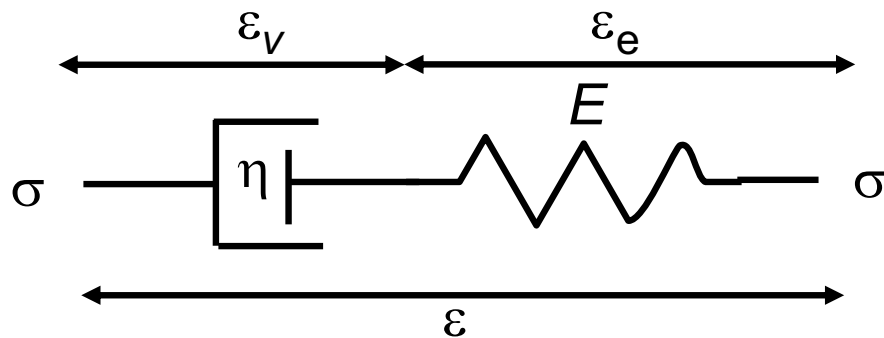
$$\sigma^r = \psi_{,\varepsilon} = E \varepsilon$$

Loi complémentaire

$$\sigma^{ir} = \eta \dot{\varepsilon}$$

$$\sigma = \underbrace{E \varepsilon}_{\sigma^r} + \underbrace{\eta \dot{\varepsilon}}_{\sigma^{ir}}$$

Maxwell (modèle série)



Version I

$$\{T = T_0, \varepsilon, \varepsilon_v\}$$

$$\psi(T = T_0, \varepsilon, \varepsilon_v) = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon_v)^2$$

$$\begin{cases} \sigma^r = \psi_{,\varepsilon} = E (\varepsilon - \varepsilon_v) \\ A_v = \psi_{,\varepsilon_v} = -\sigma^r \end{cases}$$

$$\varphi(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_v) = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}_v^2$$

$$\begin{cases} \sigma^{ir} = \varphi_{,\dot{\varepsilon}} = 0 \\ X_v = \varphi_{,\dot{\varepsilon}_v} = \eta \dot{\varepsilon}_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \sigma / \eta \\ \varepsilon_2 = \sigma / E \\ \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \end{cases}$$

structure
série

Version II

$$\{T = T_0, \varepsilon_e, \varepsilon_v\}$$

$$\psi(T = T_0, \varepsilon_e, \varepsilon_v) = \frac{1}{2} E \varepsilon_e^2$$

$$\begin{cases} A_e = \psi_{,\varepsilon_e} = E \varepsilon_e \\ A_v = \psi_{,\varepsilon_v} = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(\dot{\varepsilon}_e, \dot{\varepsilon}_v) = \frac{1}{2} \eta \dot{\varepsilon}_v^2$$

$$\begin{cases} X_e = \varphi_{,\dot{\varepsilon}_e} = 0 \\ X_v = \varphi_{,\dot{\varepsilon}_v} = \eta \dot{\varepsilon}_v \end{cases}$$

Version I

$$d_1 = \underbrace{(\sigma - \sigma^r)}_{\sigma^{ir}} \cdot \dot{\varepsilon} - \underbrace{A_v}_{X_v} \cdot \dot{\varepsilon}_v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^r = E(\varepsilon - \varepsilon_v) \\ A_v = -\sigma^r \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma^{ir} = 0 \\ X_v = \eta \dot{\varepsilon}_v \end{array} \right.$$

Lois d'état

Lois d'évolution

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_v) \\ \sigma = \eta \dot{\varepsilon}_v \end{array} \right.$$

Version II

$$d_1 = \underbrace{(\sigma - A_e)}_{X_e} \cdot \dot{\varepsilon}_e + \underbrace{(\sigma - A_v)}_{X_v} \cdot \dot{\varepsilon}_v$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_e = E \varepsilon_e \\ A_v = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_e = 0 \\ X_v = \eta \dot{\varepsilon}_v \end{array} \right.$$

Lois d'état

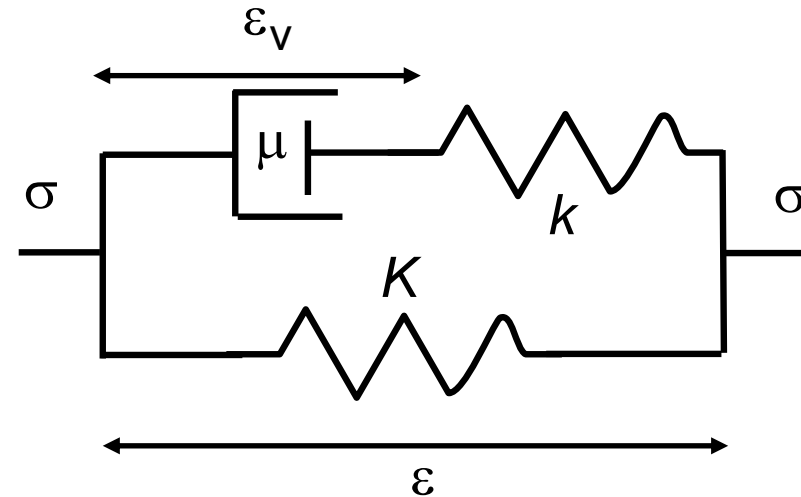
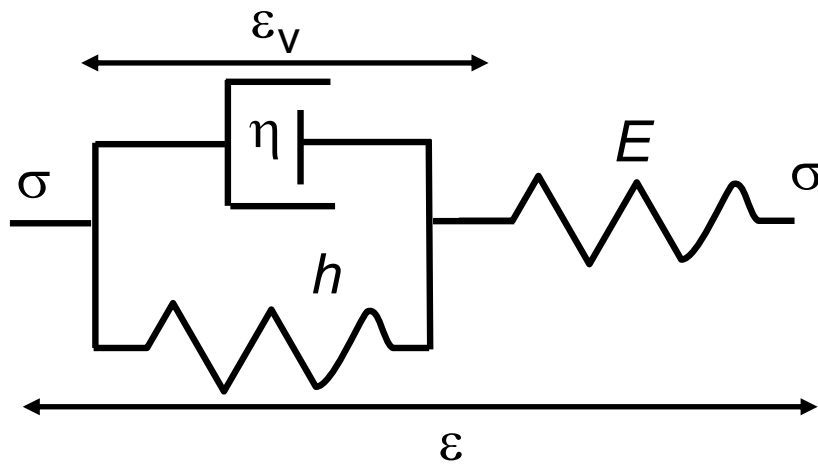
Lois d'évolution

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = E \varepsilon_e \\ \sigma = \eta \dot{\varepsilon}_v \end{array} \right.$$

Conclusion

Les deux versions sont équivalentes, elles rendent compte de la même « physique »

Zener vs. Poynting-Thomson



- 1) Pour chacun des deux modèles :
 - Choisir les variables d'état (processus isotherme).
 - Définir les potentiels ψ et φ
 - Ecrire les équations de comportement



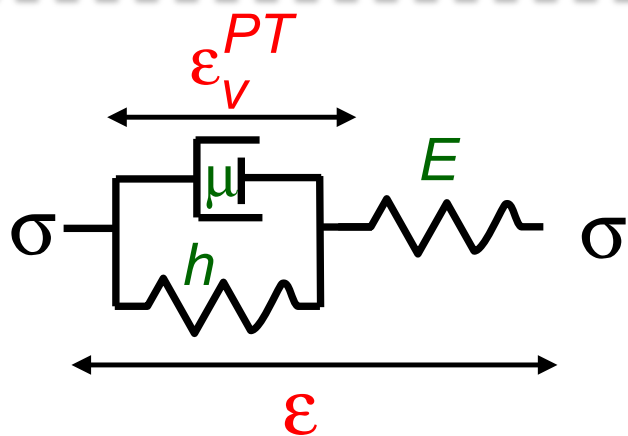
- 2) Ecrire les conditions pour que les deux modèles soient équivalents



Modèles séries et parallèles

Equivalence mécanique

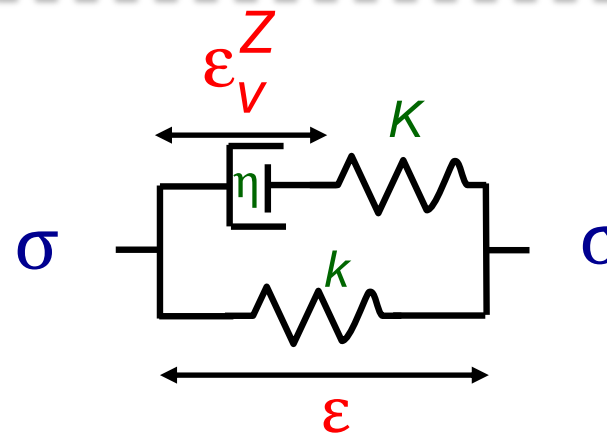
Poynting-Thomson (« série »)



Equations rhéologiques

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v^{PT} \\ \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_v^{PT}) \\ \sigma = h \varepsilon_v^{PT} + \mu \dot{\varepsilon}_v^{PT} \end{cases}$$

Zener (« parallèle »)



Equations rhéologiques

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_2 = k \varepsilon \\ \sigma_1 = K(\varepsilon - \varepsilon_v^Z) = \eta \dot{\varepsilon}_v^Z \end{cases}$$

Poynting-Thomson

Zener

Equations différentielles comportementales

$$\dot{\sigma} + \frac{E+h}{\mu} \sigma = E \dot{\varepsilon} + \frac{Eh}{\mu} \varepsilon$$

$$\dot{\sigma} + \frac{K}{\eta} \sigma = (K+k) \dot{\varepsilon} + \frac{Kk}{\eta} \varepsilon$$

Equivalence des 2 modèles si :

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{Eh}{E+h} \\ K = \frac{E^2}{E+h} \\ \eta = \left(\frac{E}{E+h} \right)^2 \mu \end{array} \right.$$

Même réponse mécanique si même condition initiale.

Equivalence énergétique

Equivalence thermomécanique des 2 modèles ?

Oui ! s'ils stockent et dissipent de la même façon quel que soit le trajet de chargement.

Poynting-Thomson

Zener

Energie libre

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon_v^{PT}) = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon_v^{PT})^2 + \frac{1}{2} h (\varepsilon_v^{PT})^2$$

Energie libre

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon_v^Z) = \frac{1}{2} k \varepsilon^2 + \frac{1}{2} K (\varepsilon - \varepsilon_v^Z)^2$$

Potentiel de dissipation

$$\varphi(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_v^{PT}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{\varepsilon}_v^{PT})^2$$

Potentiel de dissipation

$$\varphi(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_v^Z) = \frac{1}{2} \eta (\dot{\varepsilon}_v^Z)^2$$

Les contraintes sont égales à chaque instant, pour tout chargement. On peut rapidement se convaincre que les déformations visqueuses sont de même signe (et donc proportionnelles). L'égalité des dissipations donne alors :

$$\dot{\varepsilon}_v^{PT} = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}} \dot{\varepsilon}_v^Z$$

soit en intégrant dans le temps

$$\varepsilon_v^{PT} = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}} \varepsilon_v^Z$$

En développant et en égalisant les 2 énergies libres, on retrouve le système :

$$\begin{cases} k = \frac{Eh}{E+h} \\ K = \frac{E^2}{E+h} \\ \eta = \left(\frac{E}{E+h}\right)^2 \mu \end{cases}$$

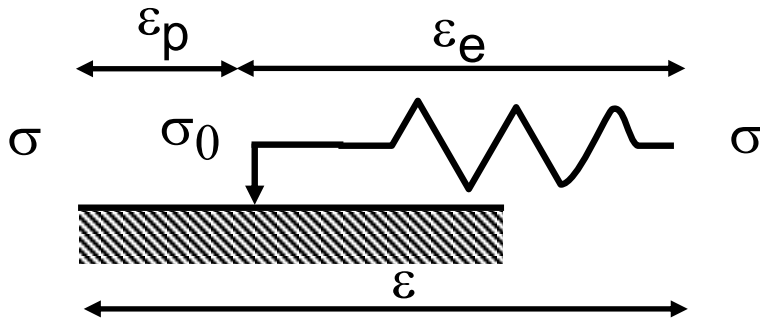
Généralisation importante aux modèles de Biot

$$\psi(\varepsilon, \underline{\varepsilon}_v) = \frac{1}{2} \left[E\varepsilon^2 + 2 \varepsilon \underline{B} \underline{\varepsilon}_v + \underline{\varepsilon}_v^T \underline{A} \underline{\varepsilon}_v \right]$$

$$\varphi(\dot{\varepsilon}, \dot{\underline{\varepsilon}}_v) = \frac{1}{2} \left[\eta \dot{\varepsilon}^2 + 2 \dot{\varepsilon} \underline{\mu} \dot{\underline{\varepsilon}}_v + \dot{\underline{\varepsilon}}_v^T \underline{\Lambda} \dot{\underline{\varepsilon}}_v \right]$$

Voir les cours et travaux de F. Sidoroff
<http://sitasido.ec-lyon.fr>

Modèle élasto-plastique parfait



ressort

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

patin

$$\dot{\varepsilon}_p = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| < \sigma_0 \\ \lambda \frac{\sigma}{|\sigma|}, \lambda \in \mathbb{R}^+ & \text{si } |\sigma| = \sigma_0 \end{cases}$$

$$\{T = T_0, \varepsilon, \varepsilon_p\}$$

$$\psi(T = T_0, \varepsilon, \varepsilon_p) = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon_p)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^r = \psi_{,\varepsilon} = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \\ A_p = \psi_{,\varepsilon_p} = -E(\varepsilon - \varepsilon_p) = -\sigma^r \end{array} \right.$$

$$\varphi(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_p) = \sigma_0 |\dot{\varepsilon}_p|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^{ir} = \varphi_{,\dot{\varepsilon}} = 0 \\ X_p = \varphi_{,\dot{\varepsilon}_p} = \sigma_0 \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_p) \end{array} \right.$$

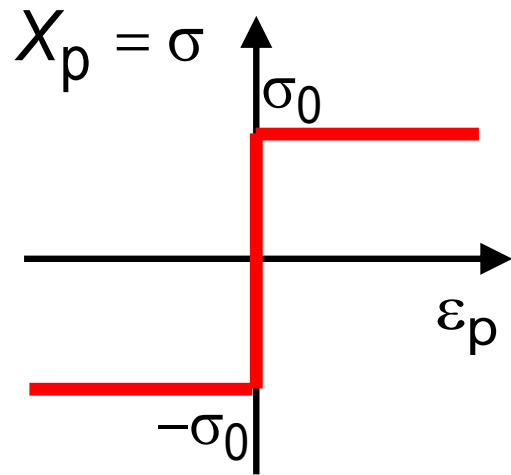
$X_p = \sigma$

Domaine d'élasticité

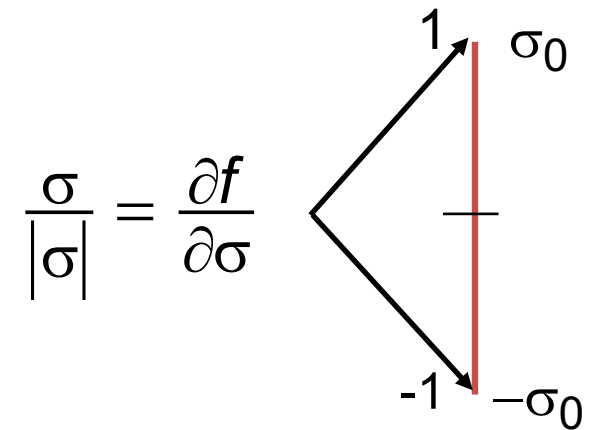
$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_0 \leq 0$$

$$= \sqrt{\sigma^2} - \sigma_0 \leq 0$$

Ecoulement plastique



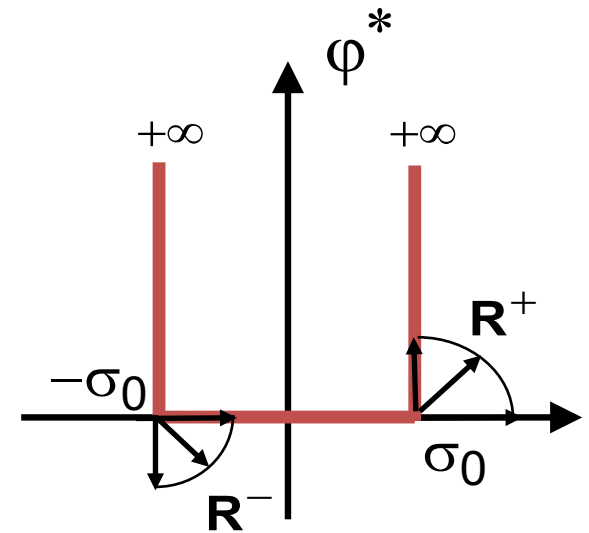
Normalité



Fonction indicatrice
du domaine d'élasticité
(ensemble convexe)

$$\dot{\varepsilon}_p = \left\| \frac{\partial \varphi^*}{\partial X_p}(\sigma^{ir}, X_p) \right\|$$

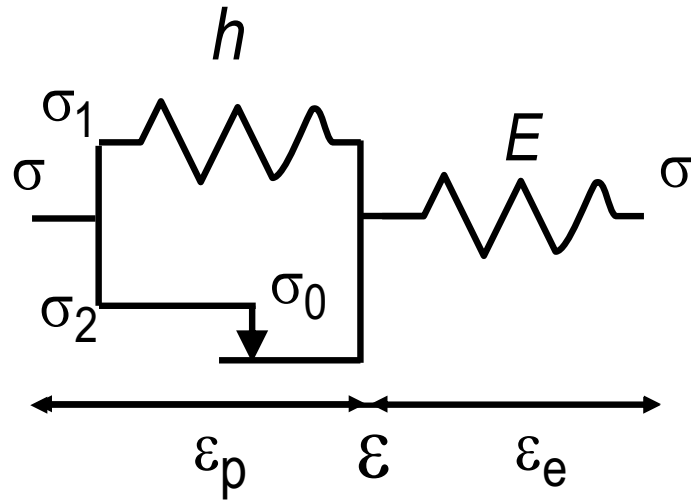
$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial X_p} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| \leq \sigma_0 \\ \lambda \frac{\sigma}{|\sigma|} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \lambda \geq 0 & \text{si } |\sigma| = \sigma_0 \end{cases}$$



$$I_\varepsilon(\varphi) = \int \sqrt{\varphi'(t)} dt$$

$$\lim_{F \rightarrow \infty} W(\cdot, F) = \infty$$

Modèle de Prager à écrouissage cinématique linéaire



$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \\ \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \dot{\varepsilon}_p = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma - \sigma_1| \leq \sigma_0 \\ \frac{\dot{\sigma}}{h} & \text{si } |\sigma - \sigma_1| = \sigma_0 \text{ et } \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\{ T = T_0, \varepsilon, \varepsilon_p \}$$

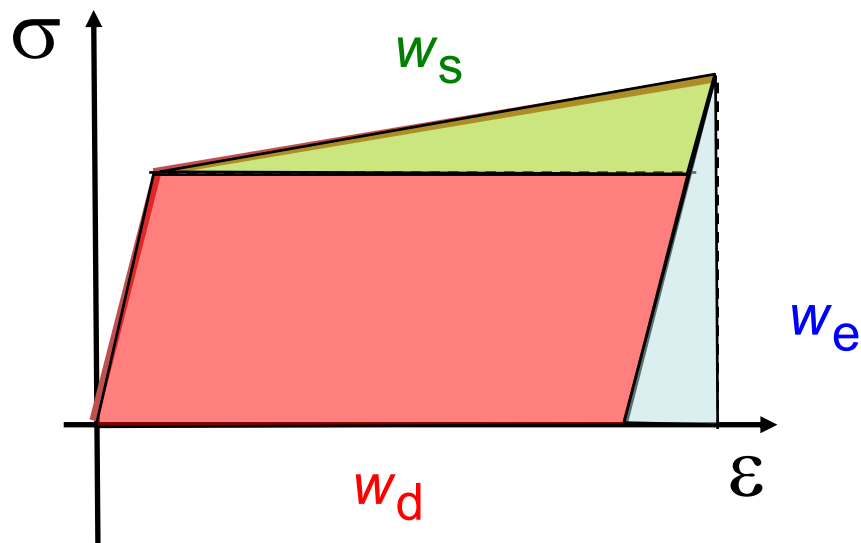
$$\psi(T = T_0, \varepsilon, \varepsilon_p) = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \varepsilon_p)^2 + \frac{1}{2} h \varepsilon_p^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^r = \psi_{,\varepsilon} = E (\varepsilon - \varepsilon_p) \\ A_p = \psi_{,\varepsilon_p} = -E (\varepsilon - \varepsilon_p) + \underbrace{h \varepsilon_p}_{\sigma_1} = -\sigma_2 \end{array} \right.$$

$$\varphi(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_p) = \sigma_0 |\dot{\varepsilon}_p|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^{ir} = \varphi_{,\dot{\varepsilon}} = 0 \\ X_p = \varphi_{,\dot{\varepsilon}_p} = \partial \varphi_{,\dot{\varepsilon}_p} = \sigma_0 \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_p) \end{array} \right.$$

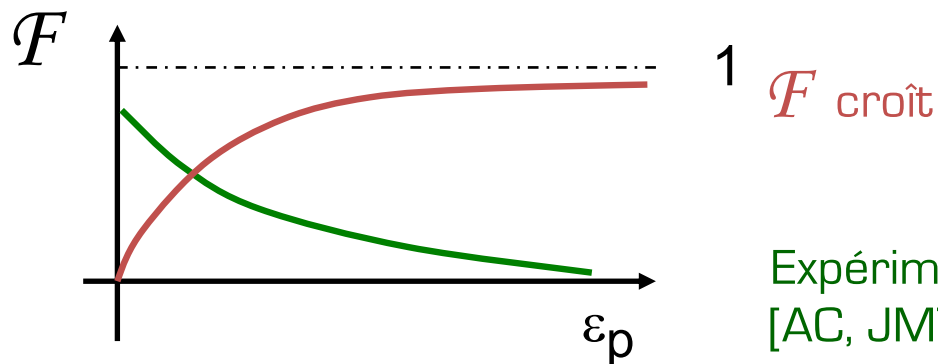
Bilan d'énergie associé au modèle de Prager



$$w_e = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$$w_d = \sigma_0 \cdot \varepsilon_p$$

$$w_s = \int_0^{\varepsilon_{max}} \sigma d\varepsilon - w_d - w_e = \frac{1}{2} h \varepsilon_p^2$$



Expérimentalement, F décroît ...
[AC, JMTA, 85]

dissipation

$$d_1 = \underbrace{\left(\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right)}_{\sigma^{ir}} \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} \dot{\varepsilon}_p$$

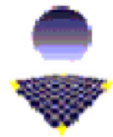
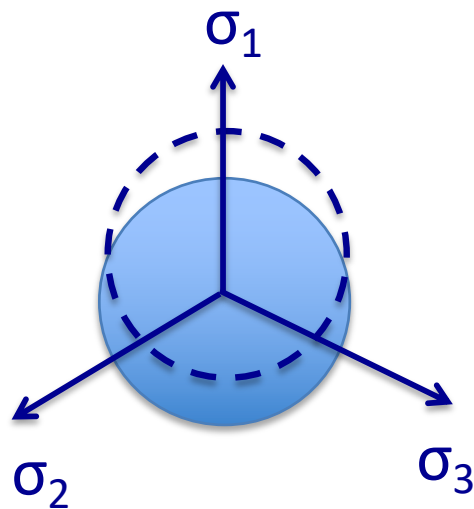
$$d_1 = \sigma_0 \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_p) \cdot \dot{\varepsilon}_p = \sigma_0 |\dot{\varepsilon}_p|$$

Taylor & Quinney [1933]
fraction d'énergie bloquée

$$\mathcal{F} = \frac{w_s}{w_a} = \frac{\frac{1}{2} h \varepsilon_p^2}{\sigma_0 \varepsilon_p + \frac{1}{2} h \varepsilon_p^2}$$

Effets thermoélastiques et dissipatifs plastiques

Matériaux thermo-élasto-plastique



Essai de traction ondulée

$$|\dot{\sigma}| = 40 \text{ MPa.s}^{-1}$$

Matériau : acier pour emboutissage

Equipe Thermomécanique des Matériaux
Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil - UMR 5508
Université Montpellier II